Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Erik Dzugas

Kredibilitní přístupy k výpočtu rezerv na pojistná plnění

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Finanční a pojistná matematika

Praha 2012

Dovoľujem si na tomto mieste poďakovať RNDr. Lucii Mazurovej, Ph.D., za poskytnutie potrebných materiálov, cenných rád, odborných komentárov a vhodných postrehov, za prejavenie trpezlivosti, ochoty a za vyjadrenie podpory pri tvorbe tejto diplomovej práce.

Prehlasujem, že som túto diplomovú prácu vypracoval samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že se na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, obzvlášť skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa §60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 13. 4. 2012 Erik Dzugas

Názov práce: Kredibilitní přístupy k výpočtu rezerv na pojistná plnění
Autor: Erik Dzugas
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedúci diplomovej práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Abstrakt: V tejto práci sumarizujeme rôzne postupy stanovenia rezerv na poistné plnenie, ktoré spočívajú v odhade budúceho nejasného a ťažko predvídateľného škodného priebehu. Ukazuje sa, že metódy, ktoré sú založené na kredibilitnej formule, prinášajú v zmysle strednej kvadratickej odchylky čo najpresnejšie výsledky. Tento v texte odvodený teoretický záver považujeme za veľmi podstatný a prínosný, preto ho ilustrujeme a prezentujeme i na numerickom príklade. Výsledky sú uvedené v priložených tabuľkách, ktoré tvoria dôležitý doplnok textu. Téma práce nadväzuje na obsah prednášok Neživotné poistenie a Teória rizika, preto môže byť tento text užitočný i pre študentov Matematicko - fyzikálnej fakulty k rozšíreniu ich vedomostí.

Kľúčové slová: kredibilita, stredná kvadratická odchylka, celkové škody, škodná rezerva

Title: Credibility approach to claims reserves calculation
Author: Erik Dzugas
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.

Abstract: In this work we summarize the various techniques of claims reserves evaluating which consist in estimate of the future uncertain and hardly anticipated loss development. It appears that the methods which are based on some credibility formula bring in the mean squared error sense the most accurate results. We consider this in the text derived conclusion very relevant and contributing, therefore we illustrate and present it on the numerical example. The calculations are introduced in the attached charts that build the important supplement of the text. The topic of this work follows up the content of Nonlife Insurance and Risk Theory lectures, therefore this text can be useful also for the students of the Faculty of Mathematics and Physics to extend their knowledge.

Keywords: credibility, mean squared error, ultimate claims, claims reserve

Obsah

Úvod

Táto práca poskytuje náhľad na dôležitú tému poistnej matematiky, ktorou je stanovenie výšky rezerv na poistné plnenie. Tie všeobecne patria medzi technické rezervy, ktoré sa vytvárajú k plneniu záväzkov pravdepodobných alebo istých, pričom neistá zostáva výška alebo okamih, ku ktorému tieto záväzky vzniknú. Rezerva na poistné plnenie je určená na krytie záväzkov z poistných udalostí, ktoré buď v období pred rozvahovým dňom vznikli, boli nahlásené, ale ešte nezlikvidované (RBNS rezerva) alebo v období pred rozvahovým dňom vznikli, no ešte neboli nahlásené (IBNR rezerva). Práve týmto typom rezervy sa budeme v texte ďalej zaoberať, pričom využijeme mnohé teoretické poznatky z pravdepodobnosti, štatistiky, teórie poisťovníctva a rizika.

Práca obsahuje viaceré známe metódy, ktoré boli navrhnuté k stanoveniu IBNR rezervy a sú založené na kredibilitnej formule. Pre odhadovanie výšky rezerv budeme mať k dispozícii 2 nezávislé odhady. Jeden apriórny odzrkadľujúci vlastné očakávania a skúsenosti, druhý bude založený na skutočnom škodnom priebehu. Prirodzenou snahou teda bude kombinovať tieto odhady s cieľom nájsť nový odhad s lepšími vlastnosťami. Práve toto je podstatou teórie kredibility. Ukážeme, že lineárnou kombináciou základných metód môžeme dospieť až k optimálnemu odhadu.

Práve prehľad kredibilitných metód v systematickej štruktúre a forme na základe vlastného jednotného značenia je cieľom tejto práce. Za hlavný prínos považujeme podrobné a prehľadné teoretické odvodenie stredných kvadratických odchyliek, a to predovšetkým Benktanderovej rezervy. Rovnako dôležitá je ale aj numerická ilustrácia tohto najpodstatnejšieho zistenia uvedená v praktickej časti. Tá vychádza zo samostatne navrhnutých vývojových trojuholníkov pozorovaných škôd.

Štruktúra práce je nasledovná. Prvá kapitola sa po krátkom predstavení metód Chain Ladder a Bornhuetter - Ferguson venuje Benktanderovmu kredibilitnému modelu. Podrobne je odvodený optimálny kredibilitný faktor, samostatnou prácou dokážeme vzťahy pre stredné kvadratické odchylky a následne ich budeme porovnávať. V závere poukazujeme na prepojenie Benktanderovho a Hovinenovho prístupu k stanoveniu IBNR rezerv. Druhá kapitola prináša pohľad na metódu Cape - Cod a nachádza kredibilitnú súvislosť s Benktanderovým modelom. Tretia kapitola nás oboznamuje so známym Bühlmann - Straubovým modelom. Prináša vzťahy pre homogénny a nehomogénny lineárny odhad celkových škôd, ako aj možný spôsob odhadovania štrukturálnych parametrov. Na základe jemnej modifikácie predpokladov modelu odvodíme strednú kvadratickú odchylku Bühlmann - Straubovej nehomogénnej rezervy. Štvrtá kapitola je poslednou teoretickou kapitolou. Prináša informatívny prehľad o modeloch de Vyldera a Macka. Zamýšľa sa nad ich predpokladmi a hľadá súvislosti s inými kredibilitnými modelmi. Záverečná piata kapitola predstavuje praktickú časť. Samostatne si zvolíme vývojové trojuholníky a numericky vypočítame skutočné výšky jednotlivých v texte spomínaných rezerv.

1. Benktanderova metóda

Táto metóda bola navrhnutá švédskym aktuárom Gunnarom Benktanderom v roku 1976. Jedná sa o kredibilitnú kombináciu klasických metód Chain Ladder (budeme skracovať na CL) a Bornhuetter - Ferguson (BF). Benktanderova metóda (Benk) je svojimi výsledkami prínosom, čoho dôkazom je aj fakt, že koncom 20. storočia sa stala predmetom záujmu pre mnohých aktuárov, a preto bola publikovaná nezávisle hneď niekoľkokrát. Jej hlavný význam spočíva v tom, že Benktanderova rezerva má skoro vždy menšiu strednú kvadratickú odchylku ako rezerva stanovená metódou CL alebo BF. Skôr ako prejdeme k Benktanderovmu kredibilitnému modelu, ktorý popíšeme na základe článku T. Macka [8] , pripomenieme základné predpoklady a výsledky klasických metód CL a BF.

1.1 Chain Ladder

Chain Ladder patrí k najpoužívanejsím metódam k stanoveniu rezerv na poistné plnenie. Napriek tomu, že algoritmus je pomerne nenáročný, poskytuje veľmi presné výsledky.

Metóda CL vychádza z kumulatívneho vývojového trojuholníka zaplatených škôd $\{X_{i,j}, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\}$, kde $X_{i,j}$ reprezentuje celkovú výšku škôd vzniknutých v roku i, uhradených do konca roka $i+j$. Vývojový trojuholník obsahuje data známe ku koncu roku I, to znamená veličiny $X_{i,j}$ také, že $i+j \leq I$. Cieľom je odhadnúť $\widehat{X}_{i,j}$ pre $i+j > I$. Budeme predpokladať, že vývoj škôd je po J rokoch ukončený, teda $X_{i,j} = 0$ pre $j > J$. V celej práci navyše uvažujeme, že $I = J$. Popíšeme predpoklady modelu podľa práce T. Macka [7] .

Základné predpoklady metódy Chain Ladder:

1. Kumulatívne škody $\{X_{k,0}, X_{k,1}, ..., X_{k,J}\}$, $\{X_{l,0}, X_{l,1}, ..., X_{l,J}\}$ sú vzájomne nezávislé pre $k \neq l$.
2. Existujú vývojové faktory $f_0, f_1, ..., f_{J-1} > 0$, že pre $0 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J$ platí

$$E[X_{i,j}|X_{i,0}, ..., X_{i,j-1}] = E[X_{i,j}|X_{i,j-1}] = f_{j-1} \cdot X_{i,j-1}. \tag{1.1}$$

Výojové faktory f_j sú hlavným predmetom záujmu metódy Chain Ladder. Popisujú vzťah medzi po sebe idúcimi kumulatívnymi škodami. Množinu známych pozorovaní v čase I označme $\Delta_I = \{X_{i,j}, i+j \leq I, 0 \leq j \leq J\}$. Za predpokladov metódy CL platí, že

$$E[X_{i,J}|\Delta_I] = E[X_{i,J}|X_{i,I-i}] = X_{i,I-i} \cdot f_{I-i} \cdot ... \cdot f_{J-1} \tag{1.2}$$

pre všetky $1 \leq i \leq I$.

Tento vzťah dáva návod na výpočet dosiaľ nevyplatených škôd z roku i. Za predpokladu Δ_I, odpovedajúca výška rezervy z roku i je určená ako

$$E[X_{i,J}|\Delta_I] - X_{i,I-i} = X_{i,I-i}(f_{I-i} \cdot ... \cdot f_{J-1} - 1). \tag{1.3}$$

Vo všeobecnosti však vývojové faktory f_j nie sú známe, a preto je potrebné ich vhodným spôsobom odhadnúť. Odhady

$$\widehat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} X_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} X_{i,j}} \tag{1.4}$$

pre $0 \leq j \leq J-1$ sú navyše nestranné a nekorelované.

Zhrnutím predchádzajúcich vzťahov dospejeme k záveru, že pre $i+j > I$ odhad kumulatívnych škôd vzniknutých v roku i a uhradených do konca roka $i+j$, spočítame ako

$$\widehat{X}_{i,j}^{CL} = \widehat{E}[X_{i,j}|\Delta_I] = X_{i,I-i} \cdot \widehat{f}_{I-i} \cdot ... \cdot \widehat{f}_{j-1}. \tag{1.5}$$

1.2 Bornhuetter - Ferguson

Rovnako ako pri metóde Chain Ladder budeme uvažovať, že Bornhuetter - Fergusonova metóda je založená na kumulatívnom vývojovom trojuholníku zaplatených škôd. Pri popise metódy vychádzame z práce [2] .

Základné predpoklady Bornhuetter - Fergusonovej metódy:

1. Kumulatívne škody $\{X_{k,0}, X_{k,1}, ..., X_{k,J}\}$, $\{X_{l,0}, X_{l,1}, ..., X_{l,J}\}$ sú vzájomne nezávislé pre $k \neq l$.

2. Existujú hodnoty $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_I > 0$, koeficienty $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{J-1} > 0$ a $\gamma_J = 1$ také, že pre všetky $0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J$ platí

$$E[X_{i,j}] = \gamma_j \cdot \mu_i, \tag{1.6}$$

a teda $E[X_{i,J}] = \mu_i$. Množina $\{\gamma_j\}_{j=0,1,...J}$ vyjadruje očakávaný podiel celkovej výšky škôd, vyplatený po j vývojových rokoch. Je zrejmé, že musí platiť nerovnosť $0 < \gamma_0 < \gamma_1 < ... < \gamma_{J-1} < \gamma_J = 1$.

Pozorujeme, že pri znalosti dát Δ_I, k výpočtu

$$\begin{aligned} E[X_{i,J}|\Delta_I] = E[X_{i,J}|X_{i,0}, ..., X_{i,I-i}] = \\ = X_{i,I-i} + E[X_{i,J} - X_{i,I-i}|X_{i,0}, ..., X_{i,I-i}] \end{aligned} \tag{1.7}$$

potrebujeme dodatočný predpoklad o závislostnej štruktúre medzi prírastkami jednotlivých škôd. Za predpokladu, že prírastky $X_{i,J} - X_{i,I-i}$ sú nezávislé na $X_{i,0}, ..., X_{i,I-i}$, získavame

$$\begin{aligned} E[X_{i,J}|\Delta_I] = E[X_{i,J}|X_{i,0}, ..., X_{i,I-i}] = \\ = X_{i,I-i} + E[X_{i,J} - X_{i,I-i}] = X_{i,I-i} + (1 - \gamma_{I-i}) \cdot \mu_i. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Následne, odhad $E[X_{i,J}|\Delta_I]$ stanovíme ako

$$\widehat{X}_{i,J}^{BF} = \widehat{E}[X_{i,J}|\Delta_I] = X_{i,I-i} + (1 - \widehat{\gamma}_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i \tag{1.9}$$

pre $1 \leq i \leq I$, kde $\widehat{\gamma}_{I-i}$ je vhodný odhad γ_{I-i} a $\widehat{\mu}_i$ je apriórny odhad očakávanej celkovej výšky škôd $E[X_{i,J}]$.

Dôležitým krokom zostáva určenie odhadov $\widehat{\gamma}_{I-i}$ a $\widehat{\mu}_i$. Z uvedených predpokladov modelu Chain Ladder plynie, že $E[X_{i,j}] = E[X_{i,0}] \cdot \prod_{k=0}^{j-1} f_k$ a $E[X_{i,J}] = E[X_{i,0}] \cdot \prod_{k=0}^{J-1} f_k$. Z týchto dvoch vzťahov vyplýva, že

$$E[X_{i,j}] = \prod_{k=j}^{J-1} f_k^{-1} \cdot E[X_{i,J}]. \tag{1.10}$$

Pri porovnaní posledne uvedeného vzťahu (1.10) so vzťahom (1.6) z predpokladu BF metódy a uvedomení si, že $E[X_{i,J}] = \mu_i$, zisťujeme, že $\prod_{k=j}^{J-1} f_k^{-1}$ je ekvivalentným nahradením koeficientu γ_j.

Vďaka tejto rovnosti odhad $\widehat{X}_{i,J}^{BF}$ vyjadrime nasledovne ako

$$\widehat{X}_{i,J}^{BF} = X_{i,I-i} + \left(1 - \frac{1}{\prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j}\right) \cdot \widehat{\mu}_i. \tag{1.11}$$

Na druhej strane, odhad $\widehat{X}_{i,J}^{CL}$ môžeme prepísať do tejto podoby

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{i,J}^{CL} = X_{i,I-i} \cdot \prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j &= X_{i,I-i} + X_{i,I-i} \cdot \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j - 1\right) = \\ &= X_{i,I-i} + \frac{\widehat{X}_{i,J}^{CL}}{\prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j} \cdot \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j - 1\right) = \\ &= X_{i,I-i} + \left(1 - \frac{1}{\prod_{j=I-i}^{J-1} \widehat{f}_j}\right) \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

Z vyjadrení (1.11) a (1.12) je vidieť rozdiel medzi metódami CL a BF. Zatiaľ čo Bornhuetter - Fergusonova metóda naďalej používa apriórny odhad $\widehat{\mu}_i$, tak v modele Chain Ladder je apriórny odhad nahradený odhadom $\widehat{X}_{i,J}^{CL}$, ktorý je založený len na pozorovaniach. Z tohto pohľadu metódy CL a BF predstavujú 2 diametrálne odlišné postoje k otázke stanovenia rezerv na poistné plnenie. A tak sa naskytá prirodzená myšlienka kombinácie týchto 2 metód do 1 kredibilitného modelu, čomu sa budeme veľmi podrobne venovať v nasledujúcej časti.

Na záver tejto podkapitoly ešte uvedieme, že hodnota $\widehat{\mu}_i$ má byť odhadnutá ešte pred získaním pozorovaní $X_{i,j}$ na základe vlastných znalostí a skúseností. Ako jedna z možností sa črtá odhad v závislosti na veľkosti prijatého poistného.

1.3 Benktanderov kredibilitný model

Uvažujme konkrétny rok vzniku škôd $i \geq 1$. Predpokladajme, že máme k dispozícii apriórny odhad $\widehat{\mu}_i$ a množinu $\{\gamma_j\}_{j=0,1,\ldots J}$. Pre $c \in [0,1]$ definujeme kredibilitnú formulu

$$u_i(c) = c \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-c) \cdot \widehat{\mu}_i, \tag{1.13}$$

kde $\widehat{X}_{i,J}^{CL}$ je odhad celkovej výšky škôd z roku i metódou Chain Ladder a $\widehat{\mu}_i$ je apriórny odhad celkových škôd. Parameter c by sa mal zvyšovať s vývojom škôd $X_{i,j}$ v čase. Preto Gunnar Benktander navrhol namiesto parametru c vziať koeficient γ_{I-i} ($c = \gamma_{I-i}$). Z uvedenej rovnosti vyplýva, že Benktanderov odhad $\widehat{X}_{i,J}^{Benk}$ celkovej výšky škôd z roku i je stanovený vzťahom

$$\widehat{X}_{i,J}^{Benk} = X_{i,I-i} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \Big(\gamma_{I-i} \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i\Big) \tag{1.14}$$

pre $1 \leq i \leq I$. Z predchádzajúcej podkapitoly pripomenieme, že výrazy $\prod_{k=j}^{J-1} f_k^{-1}$ a γ_j sú ekvivalentné. Využitím rovnosti $\widehat{X}_{i,J}^{CL} = X_{i,I-i}/\gamma_{I-i}$ a vzťahu (1.9) pristúpime k úprave vzťahu (1.14) do nasledujúcej podoby

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{i,J}^{Benk} &= \gamma_{I-i} \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{X}_{i,J}^{BF} = \\ &= X_{i,I-i} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{X}_{i,J}^{BF}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Rovnosť (1.15) poukazuje na to, že Benktanderov odhad $\widehat{X}_{i,J}^{Benk}$ môžeme vnímať ako iterovaný Bornhuetter - Fergusonov odhad s novým apriórnym odhadom $\widehat{X}_{i,J}^{BF}$ celkových škôd z roku i.
V nasledujúcom tvrdení pridáme ešte jedno vyjadrenie pre $\widehat{X}_{i,J}^{Benk}$.

Tvrdenie 1.3.1. *Za predpokladu znalosti koeficientov $\{\gamma_j\}_{j=0,1,\dots J}$ a pri rovnosti $\prod_{k=j}^{J-1} f_k^{-1} = \gamma_j$ platí, že*

$$\widehat{X}_{i,J}^{Benk} = u_i(1-(1-\gamma_{I-i})^2)$$

pre $1 \leq i \leq I$, kde funkcia $u_i(\cdot)$ je daná vzťahom (1.13).

Dôkaz. Využijeme (1.14) a $\widehat{X}_{i,J}^{CL} = X_{i,I-i}/\gamma_{I-i}$, čím dostávame rovnosť

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{i,J}^{Benk} &= X_{i,I-i} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \Big(\gamma_{I-i} \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i\Big) = \\ &= X_{i,I-i} + \gamma_{I-i} \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} - \gamma_{I-i}^2 \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \widehat{\mu}_i = \\ &= \gamma_{I-i} \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (\gamma_{I-i} - \gamma_{I-i}^2) \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \widehat{\mu}_i = \\ &= 2\gamma_{I-i} \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} - \gamma_{I-i}^2 \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \widehat{\mu}_i = \\ &= (1-(1-\gamma_{I-i})^2) \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \widehat{\mu}_i = \end{aligned}$$

$$= u_i \left(1 - (1 - \gamma_{I-i})^2\right).$$

$\square$

Označíme doposiaľ nevyplatené škody, ktoré vznikli v roku i symbolom R_i. Výšku potrebnej rezervy vypočítame z rovnosti

$$R_i = R_{i,I-i} = X_{i,J} - X_{i,I-i}. \tag{1.16}$$

Tento uvedený vzťah odpovedá výške záväzkov poisťovne v čase I.

Za predpokladu, že koeficieny $\{\gamma_j\}_{j=0,1,...J}$ a vývojové faktory $\{f_k\}_{k=0,1,...J-1}$ su známe, tak stanovíme Chain ladder rezervu a Bornhuetter - Fergusonovu rezervu nasledovne. Výraz

$$\widehat{R}_i^{BF} = \widehat{X}_{i,J}^{BF} - X_{i,I-i} = (1 - \gamma_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i \tag{1.17}$$

predstavuje Bornhuetter - Fergusonovu rezervu. Všimneme si, že škody, ktoré už boli vyplatené ($X_{i,I-i}$), nevstupujú explicitne do výpočtu rezervy $\widehat{R}_i^{BF}$.

Pre Chain Ladder rezervu $\widehat{R}_i^{CL}$ platí

$$\widehat{R}_i^{CL} = \widehat{X}_{i,J}^{CL} - X_{i,I-i} = X_{i,I-i} \cdot \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} f_j - 1 \right). \tag{1.18}$$

Aplikovaním už známeho vzťahu $\widehat{X}_{i,J}^{CL} = X_{i,I-i}/\gamma_{I-i}$, ktorý budeme využívať až do konca tejto kapitoly, dostaneme rovnosť

$$\widehat{R}_i^{CL} = \widehat{X}_{i,J}^{CL} - X_{i,I-i} = \tfrac{X_{i,I-i}}{\gamma_{I-i}} - X_{i,I-i} =$$

$$= \tfrac{X_{i,I-i} - X_{i,I-i} \cdot \gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}} = X_{i,I-i} \cdot \tfrac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}},$$

a teda rezerva stanovená metódou Chain Ladder už závisí na dosiaľ vyplatených škodách $X_{i,I-i}$.

Ak skombinujeme metódy CL a BF kredibilitným modelom (1.13) uvedeným na začiatku tejto podkapitoly, tak pre $c \in [0,1]$ odvodíme príslušnú kredibilitnú rezervu $\widehat{R}_i(c)$.

Z (1.17) a (1.18) vyplýva, že

$$\widehat{R}_i(c) = c \cdot \widehat{R}_i^{CL} + (1-c) \cdot \widehat{R}_i^{BF} = c \cdot \left(\widehat{X}_{i,J}^{CL} - X_{i,I-i} \right) + (1-c) \cdot \left(\widehat{X}_{i,J}^{BF} - X_{i,I-i} \right) =$$

$$= c \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} - c \cdot X_{i,I-i} + \widehat{X}_{i,J}^{BF} - X_{i,I-i} - c \cdot \widehat{X}_{i,J}^{BF} + c \cdot X_{i,I-i} =$$

$$= \widehat{X}_{i,J}^{BF} - X_{i,I-i} + c \cdot \left(\widehat{X}_{i,J}^{CL} - \widehat{X}_{i,J}^{BF} \right).$$

Využijeme platnosť rovnosti (1.9) a ďalej získavame

$$\widehat{R}_i(c) = X_{i,I-i} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i - X_{i,I-i} + c \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} - c \cdot (X_{i,I-i} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i) =$$

$$= (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i + c \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} - c \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} \cdot \gamma_{I-i} - c \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i =$$

$$= c \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} \cdot (1-\gamma_{I-i}) + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i \cdot (1-c) =$$

$$= (1-\gamma_{I-i}) \cdot \left(c \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-c) \cdot \widehat{\mu}_i \right) =$$

$$= (1-\gamma_{I-i}) \cdot u_i(c).$$

Dosadením rovnosti $c = \gamma_{I-i}$ do vyjadrenia $\widehat{R}_i(c)$ dospejeme k Benktanderovej kredibilitnej rezerve $\widehat{R}_i^{Benk}$ danej vzťahom

$$\widehat{R}_i^{Benk} = (1-\gamma_{I-i}) \cdot u_i(\gamma_{I-i}). \tag{1.19}$$

Pretože platí vzťah

$$u_i(\gamma_{I-i}) = \gamma_{I-i} \cdot \widehat{X}_{i,J}^{CL} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{\mu}_i = X_{i,I-i} + \widehat{R}_i^{BF} = \widehat{X}_{i,J}^{BF},$$

tak

$$\widehat{R}_i^{Benk} = (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{X}_{i,J}^{BF} \tag{1.20}$$

poukazuje na známy iteračný vzťah medzi Benktanderovou rezervou $\widehat{R}_i^{Benk}$ a Bornhuetter - Fergusonovým odhadom celkových škôd $\widehat{X}_{i,J}^{BF}$. Tento záver sme formulovali už v (1.15).

Hlavnou úlohou v tejto fáze bude teraz nájsť optimálny kredibilitný faktor c.

1.4 Optimálny kredibilitný faktor

V našom prípade je optimalita formulovaná v zmysle minimalizácie strednej kvadratickej odchylky (mse) pre odhad rezervy $\widehat{R}_i(c)$

$$mse\left(\widehat{R}_i(c)\right) = E\left[\left(R_i - \widehat{R}_i(c)\right)^2\right]. \tag{1.21}$$

Pretože platí, že rezerva $\widehat{R}_i(c)$

$$\widehat{R}_i(c) = c \cdot \widehat{R}_i^{CL} + (1-c) \cdot \widehat{R}_i^{BF} = c \cdot \left(\widehat{R}_i^{CL} - \widehat{R}_i^{BF}\right) + \widehat{R}_i^{BF}$$

je lineárnou funkciou c, tak potom stredná kvadratická chyba $mse\left(\widehat{R}_i(c)\right)$ je kvadratickou funkciou c, a preto bude mať minimum. Za účelom nájdenia tohto minima si teraz zavedieme vhodný stochastický model (označme ho ako model 1).

Predpoklady modelu 1:

1. Kumulatívne škody $\{X_{k,0}, X_{k,1}, ..., X_{k,J}\}$, $\{X_{l,0}, X_{l,1}, ..., X_{l,J}\}$ sú vzájomne nezávislé pre $k \neq l$.
2. Existujú koeficienty $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_J$, kde $\gamma_J = 1$ také, že pre všetky $0 \leq j \leq J$ platí

$$E[X_{i,j}] = \gamma_j \cdot E[X_{i,J}].$$

3. Existujú náhodné veličiny $U_1, U_2, ..., U_I$, ktoré sú nestrannými odhadmi $E[X_{i,J}]$ tak, že

$$E[U_i] = E[X_{i,J}].$$

4. Náhodné veličiny U_i sú nezávislé na $X_{i,I-i}$ a $X_{i,J}$.

Všimneme si, že model 1 sa zhoduje s predpokladmi Bornhuetter - Fergusonovej metódy, ak predpokladáme, že $U_i = \mu_i > 0$ je deterministické. V tejto podkapitole však už nebudeme brať do úvahy deterministické hodnoty μ_i očakávanej celkovej výšky škôd $E[X_{i,J}]$, ale uvažujeme nestranné odhady týchto stredných hodnôt.

Veta 1.4.1. *Za predpokladov modelu 1 optimálny kredibilitný faktor c_i^*, ktorý minimalizuje strednú kvadratickú odchylku (1.21), je daný vzťahom*

$$c_i^* = \frac{\gamma_{I-i}}{1-\gamma_{I-i}} \cdot \frac{cov\left(X_{i,I-i}, R_i\right) + \gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot var\left(U_i\right)}{var\left(X_{i,I-i}\right) + \gamma_{I-i}^2 \cdot var\left(U_i\right)} \tag{1.22}$$

pre $1 \leq i \leq I$.

Dôkaz. Platí, že

$$E\left[\left(\widehat{R}_i(c_i) - R_i\right)^2\right] = E\left[\left(c_i\left(\widehat{R}_i^{CL} - \widehat{R}_i^{BF}\right) + \widehat{R}_i^{BF} - R_i\right)^2\right] =$$

$$= c_i^2 \cdot E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL} - \widehat{R}_i^{BF}\right)^2\right] - 2 \cdot c_i \cdot E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL} - \widehat{R}_i^{BF}\right)\left(R_i - \widehat{R}_i^{BF}\right)\right] +$$

$$+ E\left[\left(R_i - \widehat{R}_i^{BF}\right)^2\right].$$

Zderivujeme podľa c_i, ľavú stranu položíme rovno nule a získavame výraz

$$0 = \frac{\partial}{\partial c} E\left[\left(\widehat{R}_i(c_i) - R_i\right)^2\right] = 2 \cdot c_i \cdot E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL} - \widehat{R}_i^{BF}\right)^2\right] -$$

$$-2 \cdot E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL} - \widehat{R}_i^{BF}\right)\left(R_i - \widehat{R}_i^{BF}\right)\right].$$

Odtiaľ plynie, že optimálne c_i je dané vzťahom

$$c_i^* = \frac{E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL} - \widehat{R}_i^{BF}\right)\left(R_i - \widehat{R}_i^{BF}\right)\right]}{E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL} - \widehat{R}_i^{BF}\right)^2\right]}.$$

Dosadíme $\widehat{R}_i^{CL} = X_{i,I-i} \cdot \frac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}}$ a $\widehat{R}_i^{BF} = (1-\gamma_{I-i}) \cdot U_i$, čím ďalej získavame výraz

$$c_i^* = \frac{E\left[\left(X_{i,I-i} \cdot (1/\gamma_{I-i} - 1) - (1-\gamma_{I-i}) \cdot U_i\right)(R_i - (1-\gamma_{I-i}) \cdot U_i)\right]}{E\left[\left(X_{i,I-i} \cdot (1/\gamma_{I-i} - 1) - (1-\gamma_{I-i}) \cdot U_i\right)^2\right]} =$$

$$= \frac{\gamma_{I-i}}{1-\gamma_{I-i}} \cdot \frac{E\left[\left(X_{i,I-i} - \gamma_{I-i} \cdot U_i\right)(R_i - (1-\gamma_{I-i}) \cdot U_i)\right]}{E\left[\left(X_{i,I-i} - \gamma_{I-i} \cdot U_i\right)^2\right]}.$$

Pretože $E\left[\gamma_{I-i} \cdot U_i\right] = E\left[X_{i,I-i}\right]$, tak

$$c_i^* = \frac{\gamma_{I-i}}{1-\gamma_{I-i}} \cdot \frac{cov\left(X_{i,I-i} - \gamma_{I-i} \cdot U_i, R_i - (1-\gamma_{I-i}) \cdot U_i\right)}{var\left(X_{i,I-i} - \gamma_{I-i} \cdot U_i\right)}.$$

Využitím predpokladu o nezávislosti náhodných veličín U_i na škodách $X_{i,J}$ a na rezervách R_i nakoniec dostávame výraz

$$c_i^* = \frac{\gamma_{I-i}}{1-\gamma_{I-i}} \cdot \frac{cov\left(X_{i,I-i},R_i\right)+\gamma_{I-i}\cdot(1-\gamma_{I-i})\cdot var(U_i)}{var\left(X_{i,I-i}\right)+\gamma_{I-i}^2\cdot var(U_i)}.$$

□

Veta (1.4.1) nám dáva vzorec pre najlepšiu kredibilitnú kombináciu klasických metod Chain Ladder a Bornhuetter - Ferguson v zmysle strednej kvadratickej chyby. V ďalšej fáze sa zameriame na explicitný výpočet optimálneho kredibilitného faktora c_i^*. K tomuto kroku je potrebné zaviesť nový explicitný stochastický model (označme ho model 2).

Predpoklady modelu 2:

1. Kumulatívne škody $\{X_{k,0}, X_{k,1}, ..., X_{k,J}\}$, $\{X_{l,0}, X_{l,1}, ..., X_{l,J}\}$ sú vzájomne nezávislé pre $k \neq l$.
2. Existujú koeficienty $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_J$, kde $\gamma_J = 1$ a existuje funkcia $\lambda^2(\cdot)$ tak, že platí

$$E[X_{i,j}|X_{i,J}] = \gamma_j \cdot X_{i,J},$$

$$var[X_{i,j}|X_{i,J}] = \gamma_j \cdot (1-\gamma_j) \cdot \lambda^2(X_{i,J})$$

pre všetky $0 \leq i \leq I$ a všetky $0 \leq j \leq J$.

Z podmienky na rozptyl si všimneme, že $var[X_{i,j}|X_{i,J}]$ konverguje k nule pre $\gamma_j \to 1$. Znamená to, že ak očakávaná výška dosiaľ nevyplatených škôd je nízka $(1-\gamma_j \to 0)$, tak rozptyl $var[X_{i,j}|X_{i,J}]$ vyjadrujúci riziko a neistotu je pomerne malý.

Vďaka posledne uvedeným predpokladom môžeme sformulovať nasledujúcu vetu.

Veta 1.4.2. *Nech sú splnené predpoklady uvedené v modeli 2. Nech U_i je nestranný odhad strednej hodnoty $E[X_{i,J}]$, a zároveň nech U_i je nezávislé na $X_{i,I-i}$ a $X_{i,J}$. Potom optimálny kredibilitný faktor c_i^*, ktorý minimalizuje strednú kvadratickú odchylku (1.21), je daný vzťahom*

$$c_i^* = \frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}, \tag{1.23}$$

kde

$$t_i = \frac{E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}{var(U_i)+var\left(X_{i,J}\right)-E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}$$

pre všetky $1 \leq i \leq I$.

Dôkaz. Uplatníme rovnosť $R_i = X_{i,J} - X_{i,I-i}$. Z vety (1.4.1) tým pádom dostávame

$$c_i^* = \frac{\gamma_{I-i}}{1-\gamma_{I-i}} \cdot \frac{cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J} - X_{i,I-i}\right) + \gamma_{I-i} \cdot \left(1-\gamma_{I-i}\right) \cdot var\left(U_i\right)}{var\left(X_{i,I-i}\right) + \gamma_{I-i}^2 \cdot var\left(U_i\right)}. \tag{1.24}$$

Upravíme niektoré výrazy na pravej strane v tejto rovnosti. Budeme využívať známe vzťahy o podmienených charakteristikách. Platí

$$var\left(X_{i,I-i}\right) = E\left[var\left(X_{i,I-i}|X_{i,J}\right)\right] + var\left(E\left[X_{i,I-i}|X_{i,J}\right]\right) =$$

$$= \gamma_{I-i} \cdot \left(1-\gamma_{I-i}\right) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] + \gamma_{I-i}^2 \cdot var\left(X_{i,J}\right)$$

a

$$cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J} - X_{i,I-i}\right) = cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J}\right) - cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,I-i}\right) =$$

$$= cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J}\right) - var\left(X_{i,I-i}\right).$$

Upravíme kovarianciu $cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J}\right)$ na tvar

$$cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J}\right) = E\left[cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J}|X_{i,J}\right)\right] +$$

$$+cov\left(E\left[X_{i,I-i}|X_{i,J}\right], E\left[X_{i,J}|X_{i,J}\right]\right) =$$

$$= 0 + cov\left(\gamma_{I-i} \cdot X_{i,J}, X_{i,J}\right) = \gamma_{I-i} \cdot var\left(X_{i,J}\right).$$

Z toho teda plynie, že

$$cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J} - X_{i,I-i}\right) = \gamma_{I-i} \cdot var\left(X_{i,J}\right) - var\left(X_{i,I-i}\right) =$$

$$= \gamma_{I-i} \cdot var\left(X_{i,J}\right) - \gamma_{I-i} \cdot \left(1-\gamma_{I-i}\right) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] - \gamma_{I-i}^2 \cdot var\left(X_{i,J}\right).$$

Dosadíme do vzťahu (1.24), čím získavame

$$c_i^* = \frac{\gamma_{I-i}}{1-\gamma_{I-i}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\gamma_{I-i} \cdot var\left(X_{i,J}\right) - \gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] - \gamma_{I-i}^2 \cdot var\left(X_{i,J}\right) + \gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot var(U_i)}{\gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] + \gamma_{I-i}^2 \cdot var\left(X_{i,J}\right) + \gamma_{I-i}^2 \cdot var(U_i)} =$$

$$= \frac{\gamma_{I-i}}{1-\gamma_{I-i}} \cdot \frac{\gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i})\left[var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] + var(U_i)\right]}{\gamma_{I-i}^2\left[\left(\gamma_{I-i}^{-1}-1\right) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] + var\left(X_{i,J}\right) + var(U_i)\right]} =$$

$$= \frac{\gamma_{I-i} \cdot \left[var(U_i) + var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\right]}{\gamma_{I-i} \cdot \left[var(U_i) + var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\right] + E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}.$$

Prevedieme ekvivalentné úpravy v posledne uvedenom výraze a dospejeme k vyjadreniu

$$c_i^* = \frac{\gamma_{I-i}}{\frac{\gamma_{I-i} \cdot \left[var(U_i) + var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\right] + E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}{var(U_i) + var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}} =$$

$$= \frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i} + \frac{E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}{var(U_i) + var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}} =$$

$$= \frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i} + t_i}.$$

□

1.5 Stredná kvadratická chyba

V tejto časti predvedieme podrobné výpočty stredných kvadratických odchyliek jednotlivých rezerv a poukážeme na hlavný prínos a význam Benktanderovej metódy. Spočíva v tom, že Benktanderova rezerva $\widehat{R}_i^{Benk}$ má menšiu strednú kvadratickú chybu ako Bornhuetter - Fergusonova rezerva $\widehat{R}_i^{BF}$ alebo rezerva Chain Ladder $\widehat{R}_i^{CL}$.

Veta 1.5.1. *Nech sú splnené predpoklady uvedené v modeli 2. Nech U_i je nestranný odhad strednej hodnoty $E[X_{i,J}]$, a zároveň nech U_i je nezávislé na $X_{i,I-i}$ a $X_{i,J}$. Potom stredné kvadratické odchylky vypočítame ako*

$$mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) = E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(1 - \gamma_{I-i} + \frac{\left(1 - \gamma_{I-i}\right)^2}{t_i}\right), \tag{1.25}$$

$$mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) = E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \frac{1 - \gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}}, \tag{1.26}$$

$$mse\left(\widehat{R}_i(c)\right) = E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(\frac{c^2}{\gamma_{I-i}} + \frac{1}{1 - \gamma_{I-i}} + \frac{(1-c)^2}{t_i}\right) \cdot \left(1 - \gamma_{I-i}\right)^2 \tag{1.27}$$

pre všetky $1 \leq i \leq I$ *.*

Dôkaz. $mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) = E\left[\left(\widehat{R}_i^{BF} - R_i\right)^2\right] = var\left(\widehat{R}_i^{BF} - R_i\right) =$

$$= var\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) + var\left(R_i\right),$$

pričom sme najprv využili, že $E\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) = E\left(R_i\right)$, pretože

$$E\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) = \left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot E\left(U_i\right) = E\left(U_i - \gamma_{I-i}\cdot U_i\right) =$$

$$= E\left(U_i - X_{i,I-i}\right) = E\left(X_{i,J} - X_{i,I-i}\right) = E\left(R_i\right),$$

a následne

$$cov\left(\widehat{R}_i^{BF}, R_i\right) = \left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot cov\left(U_i, R_i\right) = 0$$

vďaka predpokladu nezávislosti.
Vieme, že $var\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) = \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2\cdot var\left(U_i\right)$ a spočítame $var\left(R_i\right)$. Platí, že

$$var\left(R_i\right) = var\left(X_{i,J} - X_{i,I-i}\right) = var\left(X_{i,J}\right) + var\left(X_{i,I-i}\right) -$$

$$-2\cdot cov\left(X_{i,J}, X_{i,I-i}\right).$$

Z dôkazu vety (1.4.2) už vieme, že

$$cov\left(X_{i,J}, X_{i,I-i}\right) = \gamma_{I-i}\cdot var\left(X_{i,J}\right)$$

a

$$var\left(X_{i,I-i}\right) = \gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] + \gamma_{I-i}^2\cdot var\left(X_{i,J}\right).$$

Využitím týchto rovností dostávame

$$var\left(R_i\right) = var\left(X_{i,J}\right)\cdot\left(1 - 2\cdot\gamma_{I-i} + \gamma_{I-i}^2\right) + \gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] =$$

$$= \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2\cdot var\left(X_{i,J}\right) + \gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] =$$

$$= \left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] + \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2\cdot\left[var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\right].$$

Zhrnieme čiastočné výsledky, čím získame

$$mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) = \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2\cdot\left[var\left(U_i\right) + var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\right] +$$

$$+\left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right].$$

Poslednú rovnosť upravíme na tvar

$$mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) =$$

$$= E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(1 - \gamma_{I-i} + \frac{(1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \left[var(U_i) + var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\right]}{E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}\right) =$$

$$= E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(1 - \gamma_{I-i} + \frac{\frac{(1-\gamma_{I-i})^2}{E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}}{var(U_i) + var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}\right) =$$

$$= E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(1 - \gamma_{I-i} + \frac{(1-\gamma_{I-i})^2}{t_i}\right),$$

a tým sme dokázali platnosť vzťahu (1.25).

Prejdeme k odvodeniu $mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right)$.
Pretože

$$E\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) = \frac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}} \cdot E\left(X_{i,I-i}\right) = \frac{1}{\gamma_{I-i}} \cdot E\left(X_{i,I-i}\right) - E\left(X_{i,I-i}\right) =$$
$$= E\left(X_{i,J} - X_{i,I-i}\right) = E\left(R_i\right),$$

môžeme písať

$$mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) = E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL} - R_i\right)^2\right] = var\left(\widehat{R}_i^{CL} - R_i\right) =$$
$$= var\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) - 2 \cdot cov\left(\widehat{R}_i^{CL}, R_i\right) + var\left(R_i\right) =$$

$$= \left(\frac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}}\right)^2 \cdot var\left(X_{i,I-i}\right) - 2 \cdot \frac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}} \cdot cov\left(X_{i,I-i}, R_i\right) + var\left(R_i\right). \quad (1.28)$$

Vyjadrenia pre $var\left(X_{i,I-i}\right)$ a $var\left(R_i\right)$ už poznáme z predchádzajúcej časti dôkazu, takže potrebujeme spočítať už len $cov\left(X_{i,I-i}, R_i\right)$. Platí rovnosť

$$cov\left(X_{i,I-i}, R_i\right) = cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J} - X_{i,I-i}\right) = cov\left(X_{i,I-i}, X_{i,J}\right) -$$
$$- var\left(X_{i,I-i}\right) = \gamma_{I-i} \cdot var\left(X_{i,J}\right) -$$
$$- \gamma_{I-i} \cdot \left(1 - \gamma_{I-i}\right) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] - \gamma_{I-i}^2 \cdot var\left(X_{i,J}\right) =$$
$$= \gamma_{I-i} \cdot \left(1 - \gamma_{I-i}\right) \cdot var\left(X_{i,J}\right) - \gamma_{I-i} \cdot \left(1 - \gamma_{I-i}\right) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] =$$
$$= \gamma_{I-i} \cdot \left(1 - \gamma_{I-i}\right) \cdot \left[var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\right].$$

Po dosadení do (1.28) máme

$$mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) =$$

$$= \left(\tfrac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}}\right)^2 \cdot \left[\gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] + \gamma_{I-i}^2 \cdot var\left(X_{i,J}\right)\right] -$$

$$-2 \cdot \tfrac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}} \cdot \gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot \left[var\left(X_{i,J}\right) - E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\right] +$$

$$+ (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot var\left(X_{i,J}\right) + \gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] =$$

$$= \left(\tfrac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}}\right)^2 \cdot \gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] + 2 \cdot (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] +$$

$$+\gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) \cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] =$$

$$= E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left[\tfrac{(1-\gamma_{I-i})^3}{\gamma_{I-i}} + 2 \cdot (1-\gamma_{I-i})^2 + \gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i})\right].$$

Umocnením výrazov v hranatej zátvorke a úpravou na spoločného menovateľa dostaneme

$$mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) = E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \tfrac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}},$$

čím sme dokázali vzťah (1.26).

K dokončeniu dôkazu nám zostáva ešte overiť platnosť vzťahu pre $mse\left(\widehat{R}_i(c)\right)$. Platí

$$mse\left(\widehat{R}_i(c)\right) = E\left[\left(\widehat{R}_i(c) - R_i\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\left(c \cdot \widehat{R}_i^{CL} + (1-c) \cdot \widehat{R}_i^{BF} - R_i\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\left(c \cdot \left(\widehat{R}_i^{CL} - R_i\right) + (1-c) \cdot \left(\widehat{R}_i^{BF} - R_i\right)\right)^2\right] =$$

$$= c^2 \cdot mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) + 2 \cdot c \cdot (1-c) \cdot E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL} - R_i\right) \cdot \left(\widehat{R}_i^{BF} - R_i\right)\right] +$$

$$+ (1-c)^2 \cdot mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right). \tag{1.29}$$

Vyjadrenia pre $mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right)$ a $mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right)$ už poznáme. Potrebujeme spočítať $E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL} - R_i\right) \cdot \left(\widehat{R}_i^{BF} - R_i\right)\right]$. S využitím rovností $E\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) = E\left(R_i\right)$ a $E\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) = E\left(R_i\right)$ dostávame

$$E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL}-R_i\right)\cdot\left(\widehat{R}_i^{BF}-R_i\right)\right]=cov\left(\widehat{R}_i^{CL}-R_i,\widehat{R}_i^{BF}-R_i\right)=$$

$$=cov\left(\widehat{R}_i^{CL},\widehat{R}_i^{BF}\right)-cov\left(\widehat{R}_i^{CL},R_i\right)-cov\left(R_i,\widehat{R}_i^{BF}\right)+var\left(R_i\right)=$$

$$=-cov\left(\widehat{R}_i^{CL},R_i\right)+var\left(R_i\right),$$

kde sme vďaka predpokladu nezávislosti využili, že $cov\left(\widehat{R}_i^{CL},\widehat{R}_i^{BF}\right)=0$ a $cov\left(R_i,\widehat{R}_i^{BF}\right)=0$. Dosadíme za $cov\left(\widehat{R}_i^{CL},R_i\right)$ a $var\left(R_i\right)$, z čoho platí, že

$$E\left[\left(\widehat{R}_i^{CL}-R_i\right)\cdot\left(\widehat{R}_i^{BF}-R_i\right)\right]=$$

$$=-\tfrac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}}\cdot\gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot\left[var\left(X_{i,J}\right)-E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\right]+$$

$$+\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2\cdot var\left(X_{i,J}\right)+\gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]=$$

$$=-\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2\cdot var\left(X_{i,J}\right)+\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]+$$

$$+\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2\cdot var\left(X_{i,J}\right)+\gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]=$$

$$=E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\cdot\left[\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2+\gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)\right]=E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right).$$

Dosadíme do (1.29) a máme

$$mse\left(\widehat{R}_i(c)\right)=c^2\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\cdot\tfrac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}}+2\cdot c\cdot(1-c)\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)+$$

$$+(1-c)^2\cdot E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\cdot\left(1-\gamma_{I-i}+\tfrac{\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2}{t_i}\right)=$$

$$=E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left[\tfrac{c^2}{\gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)}+\tfrac{2\cdot c\cdot(1-c)}{1-\gamma_{I-i}}+\tfrac{(1-c)^2}{\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}+\tfrac{\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2}{t_i}\right)\right].$$

Upravíme členy v hranatej zátvorke na tvar

$$\tfrac{c^2}{\gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)}+\tfrac{2\cdot c}{1-\gamma_{I-i}}-\tfrac{2\cdot c^2}{1-\gamma_{I-i}}+\tfrac{(1-c)^2}{1-\gamma_{I-i}}+\tfrac{(1-c)^2}{t_i}=$$

$$=\tfrac{c^2}{\gamma_{I-i}\cdot\left(1-\gamma_{I-i}\right)}-\tfrac{c^2}{1-\gamma_{I-i}}+\tfrac{1}{1-\gamma_{I-i}}+\tfrac{(1-c)^2}{t_i}=$$

$$=\tfrac{c^2}{\gamma_{I-i}}+\tfrac{1}{1-\gamma_{I-i}}+\tfrac{(1-c)^2}{t_i}.$$

Zhrnieme a zisťujeme, že

$$mse\left(\widehat{R}_i(c)\right) = E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{c^2}{\gamma_{I-i}} + \tfrac{1}{1-\gamma_{I-i}} + \tfrac{(1-c)^2}{t_i}\right),$$

čo je záver dôkazu vyjadrenia (1.27), a teda aj vety 1.5.1. □

Pre úplnosť ešte uvedieme v podobe jednoduchých dôsledkov vyjadrenia strednej kvadratickej odchylky Benktanderovej rezervy $mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right)$ a strednej kvadratickej odchylky rezervy stanovenej pomocou optimálneho kredibilitného faktora c_i^*, teda $mse\left(\widehat{R}_i(c_i^*)\right)$.

Dôsledok 1.5.2. *Nech platia všetky predpoklady uvedené vo vete (1.5.1). Potom pre strednú kvadratickú odchylku Benktanderovej rezervy platí, že*

$$mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right) = E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(\gamma_{I-i} + \frac{1}{1-\gamma_{I-i}} + \frac{\left(1-\gamma_{I-i}\right)^2}{t_i}\right) \cdot \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2 \tag{1.30}$$

pre všetky $1 \leq i \leq I$ *.*

Dôkaz. Uvažujeme $mse\left(\widehat{R}_i(c)\right)$, položíme $c = \gamma_{I-i}$, z čoho následne dostávame, že

$$mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right) = mse\left(\widehat{R}_i(\gamma_{I-i})\right) =$$

$$= E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2 \cdot \left(\tfrac{\gamma_{I-i}^2}{\gamma_{I-i}} + \tfrac{1}{1-\gamma_{I-i}} + \tfrac{(1-\gamma_{I-i})^2}{t_i}\right) =$$

$$= E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2 \cdot \left(\gamma_{I-i} + \tfrac{1}{1-\gamma_{I-i}} + \tfrac{(1-\gamma_{I-i})^2}{t_i}\right).$$

□

Dôsledok 1.5.3. *Nech platia všetky predpoklady uvedené vo vete (1.5.1). Potom pre strednú kvadratickú odchylku rezervy stanovenej pomocou optimálneho kredibilitného faktora* c_i^* *platí*

$$mse\left(\widehat{R}_i(c_i^*)\right) = E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{\gamma_{I-i}+t_i} + \frac{1}{1-\gamma_{I-i}}\right) \cdot \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2 \tag{1.31}$$

pre všetky $1 \leq i \leq I$ *.*

Dôkaz. Uvažujeme $mse\left(\widehat{R}_i(c)\right)$. Z vety (1.4.2) vieme, že optimálny kredibilitný faktor c_i^* je definovaný vzťahom $c_i^* = \frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}$ Teda položíme $c = c_i^*$, z čoho následne dostávame

$$mse\left(\widehat{R}_i(c_i^*)\right) = mse\left(\widehat{R}_i\left(\frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}\right)\right) =$$

$$= E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right] \cdot \left(1-\gamma_{I-i}\right)^2 \cdot \left[\frac{\left(\frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}\right)^2}{\gamma_{I-i}} + \frac{\left(1-\frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}\right)^2}{t_i} + \frac{1}{1-\gamma_{I-i}}\right]. \tag{1.32}$$

Prvé 2 členy v hranatej zátvorke upravíme nasledovne

$$\frac{\left(\frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}\right)^2}{\gamma_{I-i}} + \frac{\left(1-\frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}\right)^2}{t_i} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}\right)^2}{\gamma_{I-i}} + \frac{1}{t_i} - \frac{\frac{2\cdot\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}}{t_i} + \frac{\left(\frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+t_i}\right)^2}{t_i} =$$

$$= \frac{\gamma_{I-i}^2\cdot t_i+\gamma_{I-i}\cdot(\gamma_{I-i}+t_i)^2-2\cdot\gamma_{I-i}^2\cdot(\gamma_{I-i}+t_i)+\gamma_{I-i}^3}{\gamma_{I-i}\cdot t_i\cdot(\gamma_{I-i}+t_i)^2} =$$

$$= \frac{\gamma_{I-i}^2\cdot(\gamma_{I-i}+t_i)+(\gamma_{I-i}+t_i)\cdot\left[\gamma_{I-i}\cdot(\gamma_{I-i}+t_i)-2\cdot\gamma_{I-i}^2\right]}{\gamma_{I-i}\cdot t_i\cdot(\gamma_{I-i}+t_i)^2} =$$

$$= \frac{(\gamma_{I-i}+t_i)\cdot\left[\gamma_{I-i}^2+\gamma_{I-i}\cdot(\gamma_{I-i}+t_i)-2\cdot\gamma_{I-i}^2\right]}{\gamma_{I-i}\cdot t_i\cdot(\gamma_{I-i}+t_i)^2} =$$

$$= \frac{\gamma_{I-i}\cdot t_i}{\gamma_{I-i}\cdot t_i\cdot(\gamma_{I-i}+t_i)} = \frac{1}{\gamma_{I-i}+t_i}.$$

Dosadením do (1.32) dostávame požadovaný vzťah (1.31). □

Veta (1.5.1) a jej dôsledok (1.5.2) poskytujú návod na porovnanie stredných kvadratických odchyliek rezerv stanovených rôznymi metódami.

Platí, že

$$mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) < mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\gamma_{I-i} + \frac{(1-\gamma_{I-i})^2}{t_i} < \frac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1-\gamma_{I-i}}{t_i} < \frac{1}{\gamma_{I-i}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_{I-i}\cdot(1-\gamma_{I-i}) < t_i\cdot(1-\gamma_{I-i}) \Leftrightarrow \gamma_{I-i} < t_i,$$

to znamená, že k odhadu rezerv na poistné plnenie by sme mali použiť Bornhuetter - Fergusonovu metódu pre také roky, v ktorých očakávaný podiel celkovej výšky škôd γ_{I-i} je menší ako miera volatility t_i. Naopak, metóda Chain Ladder je výhodnejšia pre neskoršie vývojové roky, kde $\gamma_{I-i} > t_i$.

Ďalej platia nerovnosti

$$mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right) < mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \left(\gamma_{I-i} + \tfrac{1}{1-\gamma_{I-i}} + \tfrac{(1-\gamma_{I-i})^2}{t_i}\right) < 1 - \gamma_{I-i} + \tfrac{(1-\gamma_{I-i})^2}{t_i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \left(\gamma_{I-i} + \tfrac{(1-\gamma_{I-i})^2}{t_i}\right) < (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \tfrac{1}{t_i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{\gamma_{I-i}\cdot t_i + 1 - 2\cdot\gamma_{I-i} + \gamma_{I-i}^2}{t_i} < \tfrac{1}{t_i} \Leftrightarrow \gamma_{I-i}\cdot t_i - 2\cdot\gamma_{I-i} + \gamma_{I-i}^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_i < 2 - \gamma_{I-i}$$

a

$$mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right) < mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \left(\gamma_{I-i} + \tfrac{1}{1-\gamma_{I-i}} + \tfrac{(1-\gamma_{I-i})^2}{t_i}\right) < \tfrac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma_{I-i}\cdot(1-\gamma_{I-i}) \cdot \left(\gamma_{I-i} + \tfrac{1}{1-\gamma_{I-i}} + \tfrac{(1-\gamma_{I-i})^2}{t_i}\right) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_i \cdot \gamma_{I-i}^2 \cdot (1-\gamma_{I-i}) + t_i \cdot \gamma_{I-i} + \gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i})^3 < t_i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_i \cdot \left[(1-\gamma_{I-i}) \cdot \left(\gamma_{I-i}^2 - 1\right)\right] + \gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i})^3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t_i > \tfrac{-\gamma_{I-i}\cdot(1-\gamma_{I-i})^3}{(1-\gamma_{I-i})\cdot(\gamma_{I-i}-1)\cdot(\gamma_{I-i}+1)} \Leftrightarrow t_i > \tfrac{\gamma_{I-i}\cdot(1-\gamma_{I-i})}{\gamma_{I-i}+1}.$$

Nasledujúca tabuľka znázorňuje intervaly pre mieru volatility t_i, v ktorých je Benktanderova metóda v porovnaní s metódami Bornhuetter - Ferguson a Chain Ladder v závislosti na γ_{I-i} najlepšia, to znamená, že je splnená nerovnosť $\gamma_{I-i} \cdot (1-\gamma_{I-i}) / (1+\gamma_{I-i}) < t_i < 2 - \gamma_{I-i}$.

Tabuľka 1.5.1 Závislosť t_i na γ_{I-i} pri výpočte strednej kvadratickej odchylky Benktanderovej rezervy $mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right)$

γ_{I-i}	$1-\gamma_{I-i}$	$1+\gamma_{I-i}$	$\gamma_{I-i}\cdot(1-\gamma_{I-i})\,/\,(1+\gamma_{I-i})$				$2-\gamma_{I-i}$
0	1	1	0				2
0,1	0,9	1,1	0,081				1,9
0,2	0,8	1,2	0,133				1,8
0,3	0,7	1,3	0,161	$<$	t_i	$<$	1,7
0,4	0,6	1,4	0,171				1,6
0,5	0,5	1,5	0,166				1,5
0,6	0,4	1,6	0,150				1,4
0,7	0,3	1,7	0,123	$<$	t_i	$<$	1,3
0,8	0,2	1,8	0,088				1,2
0,9	0,1	1,9	0,047				1,1
1	0	2	0				1

Prameň: Vlastný výpočet

V článku [8], kapitole 3, sa autor domnieva, že niektoré poisťovne volia $t_i = \frac{E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]}{var(U_i)+var\left(X_{i,J}\right)-E\left[\lambda^2\left(X_{i,J}\right)\right]} = 0,5$. Z predchádzajúcej tabuľky je potom vidieť, že také $t_i \in \left(\frac{\gamma_{I-i}\cdot(1-\gamma_{I-i})}{1+\gamma_{I-i}}, 2-\gamma_{I-i}\right)$, a teda Benktanderova metóda je v zmysle strednej kvadratickej odchylky pre $t_i = 0,5$ najlepšia pre ľubovoľný očakávaný podiel celkových škôd γ_{I-i}. Miera volatility je však pre každý vývojový trojuholník škôd odlišná, preto by mala byť pre každý príklad samostatne vypočítaná.

1.6 Hovinenov prístup

Gunnar Benktander nebol jediný, kto hľadal kredibilitnú súvislosť medzi klasickými metódami Chain Ladder a Bornhuetter - Ferguson. Nezávisle na jeho záveroch publikoval svoj návrh v roku 1981 aj fínsky aktuár Esa Hovinen. Na rozdiel od Benktandera ale Hovinen aplikoval kredibilitnú kombináciu priamo na IBNR rezervy, teda navrhol model

$$\widehat{R}_i^{Hovi} = c\cdot\widehat{R}_i^{CL} + (1-c)\cdot\widehat{R}_i^{BF}, \tag{1.33}$$

kde $\widehat{R}_i^{Hovi}$ je Hovinenov odhad škôd, ktoré vznikli v roku i, ale ešte neboli vyplatené a $\widehat{R}_i^{CL}$, resp. $\widehat{R}_i^{BF}$ je odhad rezervy stanovenej metódou Chain Ladder, resp. Bornhuetter - Fergusonovou metódou.

Hovinen nahradil kredibilitný faktor c koeficientom γ_{I-i}. Využijeme, že platí rovnosť $\widehat{R}_i^{CL} = X_{i,I-i} \cdot \frac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}}$ a odvodíme Hovinenovu rezervu $\widehat{R}_i^{Hovi}$.

$$\begin{aligned} \widehat{R}_i^{Hovi} = \gamma_{I-i} \cdot X_{i,I-i} \cdot \frac{1-\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{R}_i^{BF} = \\ = (1-\gamma_{I-i}) \cdot \left[X_{i,I-i} + \widehat{R}_i^{BF}\right] = \\ = (1-\gamma_{I-i}) \cdot \widehat{X}_{i,J}^{BF} = \widehat{R}_i^{Benk}, \end{aligned} \tag{1.34}$$

pričom posledná rovnosť plynie zo vzťahu (1.20).

Z (1.34) vidíme, že Hovinenova rezerva je identická Benktanderovej rezerve $\left(\widehat{R}_i^{Hovi} = \widehat{R}_i^{Benk}\right)$, a tak pre ňu platia rovnaké výsledky a závery, aké sme už odvodili v minulých podkapitolách. Táto metóda preto v literatúre často figuruje pod názvom Benktander - Hovinenova metóda.

2. Metóda Cape - Cod

Veľká nevýhoda metódy Chain Ladder je, že celková výška škôd úplne závisí na poslednom pozorovaní na diagonále. To môže mať negatívny dopad pri stanovení rezervy na poistné plnenie. Jedna z možností ako zjemniť túto skutočnosť, je skombinovať Chain Ladder s Bornhuetter - Fergusonovou metódou do kredibilitného Benktanderovho modelu, čomu sme sa už podrobne venovali. Druhá možnosť je popísaná v modeli Cape - Cod (skrátime na CC), ktorého podstatou je nahradenie známych diagonálnych pozorovaní robustnými hodnotami. Metódu popíšeme na základe predpokladov a vzťahov uvedených v práci [10] .

Základné predpoklady metódy Cape - Cod:

1. Kumulatívne škody $\{X_{k,0}, X_{k,1}, ..., X_{k,J}\}$, $\{X_{l,0}, X_{l,1}, ..., X_{l,J}\}$ sú vzájomne nezávislé pre $k \neq l$.
2. Existujú parametre $\pi_0, \pi_1, ..., \pi_I > 0$, $\tau > 0$, koeficienty $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{J-1} > 0$ a $\gamma_J = 1$ také, že platí

$$E[X_{i,j}] = \tau \cdot \pi_i \cdot \gamma_j \tag{2.1}$$

pre všetky $0 \leq i \leq I$.

Vidíme, že predpoklady modelu Cape - Cod sa zhodujú s BF metódou, ak uvážime, že $\mu_i = \tau \cdot \pi_i$. Parameter π_i popisuje poistné prijaté v roku i, parameter τ vyjadruje priemerný škodný pomer a množina $\{\gamma_j\}_{j=0,1,...J}$ označuje očakávaný podiel celkovej výšky škôd, vyplatený po j vývojových rokoch. Budeme predpokladať, že τ je nezávislé na roku vzniku škôd i. Pre každý rok i teraz odhadneme škodný pomer $\widehat{\tau}_i$, pričom využijeme celkový odhad škôd metódou Chain Ladder $\widehat{X}_{i,j}^{CL}$. Výsledný tvar $\widehat{\tau}_i$ je

$$\widehat{\tau}_i = \frac{\widehat{X}_{i,J}^{CL}}{\pi_i} = \frac{X_{i,I-i}}{\prod_{j=I-i}^{J-1} f_j^{-1} \cdot \pi_i} = \frac{X_{i,I-i}}{\gamma_{I-i} \cdot \pi_i}. \tag{2.2}$$

Pretože platí vyjadrenie

$$E\left[\widehat{\tau}_i\right] = \frac{1}{\pi_i} \cdot E\left[\widehat{X}_{i,J}^{CL}\right] = \frac{1}{\pi_i \cdot \gamma_{I-i}} \cdot E\left[X_{i,I-i}\right] = \frac{1}{\pi_i} \cdot E\left[X_{i,J}\right] = \tau, \tag{2.3}$$

tak $\widehat{\tau}_i$ je nestranným odhadom parametru τ.

Robustný celkový škodný pomer $\widehat{\tau}^{CC}$ je odhadnutý nasledovne ako

$$\widehat{\tau}^{CC} = \sum_{i=0}^{I} \frac{\pi_i \cdot \gamma_{I-i}}{\sum_{k=0}^{I} \pi_k \cdot \gamma_{I-k}} \cdot \widehat{\tau}_i = \frac{\sum_{i=0}^{I} X_{i,I-i}}{\sum_{i=0}^{I} \pi_i \cdot \gamma_{I-i}}, \tag{2.4}$$

z čoho vyplýva, že pre novú robustnejšiu hodnotu na diagonále $\widehat{X}_{i,I-i}^{CC}$ vypočítanú na základe predpokladov modelu Cape - Cod platí rovnosť

$$\widehat{X}_{i,I-i}^{CC} = \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i \cdot \gamma_{I-i} \tag{2.5}$$

pre všetky $i > 0$.

Odhad celkových škôd vzniknutých v roku i, teda veličinu $\widehat{X}_{i,J}^{CC}$ určíme ako

$$\widehat{X}_{i,J}^{CC} = X_{i,I-i} - \widehat{X}_{i,I-i}^{CC} + \prod_{j=I-i}^{J-1} f_j \cdot \widehat{X}_{i,I-i}^{CC} \tag{2.6}$$

pre $1 \leq i \leq I$. Vidíme, že k stanoveniu $\widehat{X}_{i,J}^{CC}$ potrebujeme poznať nielen skutočné pozorovanie na diagonále $X_{i,I-i}$, ale aj robustnú hodnotu $\widehat{X}_{i,I-i}^{CC}$.

Cape - Cod rezervu $\widehat{R}_i^{CC}$ pre $1 \leq i \leq I$ stanovíme zo vzťahu

$$\widehat{R}_i^{CC} = \widehat{X}_{i,J}^{CC} - X_{i,I-i}. \tag{2.7}$$

Upravíme rovnosť (2.7) s využitím vzťahu (2.6), čím pre Cape - Cod rezervu $\widehat{R}_i^{CC}$ dostávame vyjadrenie

$$\begin{aligned} \widehat{R}_i^{CC} &= \widehat{X}_{i,J}^{CC} - X_{i,I-i} = \widehat{X}_{i,I-i}^{CC} \cdot \left(\prod_{j=I-i}^{J-1} f_j - 1 \right) = \\ &= \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i \cdot \gamma_{I-i} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_{I-i}} - 1 \right) = \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i \cdot (1 - \gamma_{I-i}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

pre všetky $1 \leq i \leq I$.

Pri porovnaní vyjadrenia rezervy Cape - Cod $\widehat{R}_i^{CC}$ (2.8) s kredibilitnou Benktanderovou rezervou $\widehat{R}_i^{Benk}$ zo vzťahu (1.19) vidíme, že obe rezervy majú veľmi podobný tvar.

Pretože platí odvodenie

$$
\begin{aligned}
u_i\left(\gamma_{I-i}\right) &= \gamma_{I-i} \cdot \frac{\widehat{X}_{i,I-i}^{CC}}{\gamma_{I-i}} + \left(1-\gamma_{I-i}\right) \cdot \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i = \\
&= \widehat{X}_{i,I-i}^{CC} + \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i - \gamma_{I-i} \cdot \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i = \\
&= \widehat{X}_{i,I-i}^{CC} + \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i - \widehat{X}_{i,I-i}^{CC} = \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i,
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

tak sme dospeli k záveru, že metóda Cape - Cod je vlastne kredibilitným modelom Benktanderovho typu s kredibilitným faktorom $c = \gamma_{I-i}$, kde sa navyše kombinujú robustné diagonálne hodnoty $\widehat{X}_{i,I-i}^{CC}$ s apriórnym odhadom $\widehat{\mu}_i = \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i$ očakávanej celkovej výšky škôd $E\left[X_{i,J}\right]$ Bornhuetter - Fergusonovho typu.

3. Bühlmann - Straubov model teórie kredibility

Bühlmann - Straubov model (skrátime na BS) je jedným z najdôležitejších a najpoužívanejších modelov v teórii kredibility. Jeho význam spočíva v stanovení sadzby poistného, výšky celkových škôd a príslušných rezerv či v odvetviach neživotného poistenia alebo v zaistení. Navyše BS model je základným pilierom pre niektoré ďalšie hierarchické alebo regresné kredibilitné modely. Pri popise modelu vychádzame z predpokladov uvedených v článku W. Neuhausa [9] , ktoré doplníme o niektroré závery z kníh [3] a [10] .

3.1 Popis modelu

Na začiatku uvažujme nekumulatívny vývojový trojuholník uhradených škôd, jedná sa teda o súbor náhodných veličín $\{Y_{i,j}, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\}$, kde $Y_{i,j}$ predstavuje celkovú výšku škôd, ktoré vznikli v roku i a boli zaplatené práve v roku $i + j$. Pripomenieme, že

$$Y_{i,j} = X_{i,j} - X_{i,j-1} \tag{3.1}$$

pre $j \geq 1$, pričom $Y_{i,0} = X_{i,0}$, kde $\{X_{i,j}, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\}$ sú náhodné veličiny pochádzajúce z kumulatívneho trojuholníka tak, ako sme ich definovali v minulých kapitolách.
Úplne analogicky definujeme koeficienty $\{\delta_j\}_{j=0,1,...J}$ vyjadrujúce očakávaný podiel celkových škôd, ktoré budú vyplatené práve vo vývojovom roku j, teda platí, že

$$\delta_j = \gamma_j - \gamma_{j-1} > 0 \tag{3.2}$$

pre $j \geq 1$, kde $\{\gamma_j\}_{j=0,1,...J}$ sú známe koeficienty z predpokladov metódy Bornhuetter - Ferguson. Pre úplnosť ešte uvedieme, že $\delta_0 = \gamma_0 > 0$.
Navyše pre každý rok vzniku škôd i zavedieme rizikový parameter Θ_i, ktorý tento rok plne popisuje a charakterizuje.

Základné predpoklady Bühlmann - Straubovho modelu:

1. Rizikové parametre $\Theta_0, \Theta_1, ..., \Theta_I$ sú vzájomne nezávislé, stejne rozdelené náhodné veličiny.

2. Náhodné vektory $(\Theta_i, Y_{i,0}, Y_{i,1}..., Y_{i,J})$ sú vzájomne nezávislé pre všetky $0 \leq i \leq I$.
3. Existujú merateľné funkcie $\mu(\cdot)$ a $\sigma^2(\cdot)$ také, že pre všetky $0 \leq i \leq I$ a všetky $0 \leq j \leq J$ platia vzťahy

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Y_{i,j}}{\delta_j}|\Theta_i\right] &= \mu\left(\Theta_i\right), \\ var\left[\frac{Y_{i,j}}{\delta_j}|\Theta_i\right] &= \frac{\sigma^2\left(\Theta_i\right)}{\delta_j}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

4. $cov\left(\frac{Y_{i,k}}{\delta_k}, \frac{Y_{i,l}}{\delta_l}|\Theta_i\right) = 0$ pre $k \neq l$.

Pre kumulatívne hodnoty škôd $X_{i,j}$ nahradíme predpoklady $2 - 4$ novými predpokladmi $2^* - 4^*$:

2^*. Náhodné vektory $(\Theta_i, X_{i,0}, X_{i,1}..., X_{i,J})$ sú vzájomne nezávislé pre všetky $0 \leq i \leq I$.
3^*. Existujú merateľné funkcie $\mu(\cdot)$ a $\sigma^2(\cdot)$ také, že pre všetky $0 \leq i \leq I$ a všetky $0 \leq j \leq J$ platia vzťahy

$$\begin{aligned} E\left[X_{i,j}|\Theta_i\right] &= \gamma_j \cdot \mu\left(\Theta_i\right), \\ var\left[X_{i,j}|\Theta_i\right] &= \gamma_j \cdot \sigma^2\left(\Theta_i\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

4^*. $cov\left(X_{i,k}, X_{i,l}|\Theta_i\right) = 0$ pre $k \neq l$.

Pri porovnaní vzťahu pre rozptyl (3.4) s iným vyjadrením rozptylu v tvare $var[X_{i,j}|X_{i,J}] = \gamma_j \cdot (1-\gamma_j) \cdot \lambda^2(X_{i,J})$, ktorý je uvedený v predpokladoch modelu 2 na strane 13 si všimneme, že výraz $(1-\gamma_j) \cdot \lambda^2(X_{i,J})$ je v prípade modelu BS nahradený výrazom $\sigma^2\left(\Theta_i\right)$. Navyše dodávame, že v žiadnom kroku nie je potrebné konkretizovať explicitné rozdelenie náhodných veličín Θ_i ani pozorovaní $Y_{i,j}$. Podstatným faktorom je totiž znalosť prvých 2 momentov veličín $Y_{i,j}$.

Na záver tejto podkapitoly definujme štrukturálne parametre:
$m = E\left[\mu\left(\Theta_i\right)\right] = E\left[\frac{Y_{i,j}}{\delta_j}\right]$,
$s^2 = E\left[\sigma^2\left(\Theta_i\right)\right]$,
$a = var\left(\mu\left(\Theta_i\right)\right)$.

Parameter a je mierou heterogenity portfólia zmlúv v čase, parameter s^2 predstavuje variabilitu škodných udalostí v rámci jedného roku i.

3.2 Nehomogénny lineárny kredibilitný odhad

Na základe už známych pozorovaní $\{Y_{i,j}, i = 0, ..., I, j = 0, ..., I-i\}$ chceme odhadnúť celkové škody z roku i

$$E\left[X_{i,J}|\Theta_i\right] = \mu\left(\Theta_i\right). \tag{3.5}$$

Odhad budeme hľadať ako najlepší v zmysle strednej kvadratickej odchylky a zároveň lineárny. To znamená, že spomedzi všetkých odhadov, ktoré sú lineárnymi kombináciami pozorovaní $Y_{i,0}, ..., Y_{i,I-i}$ nájdeme odhad $\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom}$ minimalizujúci strednú kvadratickú odchylku. Tento problém vedie na optimalizačnú úlohu

$$\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom} = \text{argmin}_{M\in\Omega}\text{E}\left[\left(\mu\left(\Theta_i\right) - M\right)^2\right],$$

kde množina Ω obsahuje všetky možné prípustné nehomogénne lineárne kombinácie pozorovaní $Y_{i,0}, ..., Y_{i,I-i}$, teda

$$\Omega = \left\{M; M = c_{i,0} + \textstyle\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{I-i} c_{i,j}\cdot Y_{i,j}\right\},$$

pričom $c_{i,j}$ sú reálne konštanty.

Metódou viazaných extrémov je možné odvodiť, že ak sú splnené všetky predpoklady Bühlmann - Straubovho modelu, tak potom optimálny nehomogénny lineárny kredibilitný odhad veličiny $\mu\left(\Theta_i\right)$ podmienený známymi pozorovaniami $\{Y_{i,j}, i = 0, ..., I, j = 0, ..., I-i\}$, je daný vzťahom

$$\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom} = z_i\cdot\rho_i + (1-z_i)\cdot m \tag{3.6}$$

pre všetky $0 \leq i \leq I$, kde

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i} + s^2/a}, \\ \rho_i &= \sum_{j=0}^{I-i}\frac{\delta_j}{\gamma_{I-i}}\cdot\frac{Y_{i,j}}{\delta_j} = \frac{X_{i,I-i}}{\gamma_{I-i}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nehomogénny odhad $\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom}$ je nestranný odhad parametru m, teda platí $E\left[\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom}\right] = E\left[\mu\left(\Theta_i\right)\right] = m$.

3.3 Homogénny lineárny kredibilitný odhad

V prípade, že apriórna stredná hodnota $E[\mu(\Theta_i)]$ nie je známa, môžeme jej hodnotu odhadnúť zo známych pozorovaní. Tento spôsob nás dovedie k homogénnemu lineárnemu odhadu, ktorý teraz analogicky a samostatne popíšeme.

Podobne ako v nehomogénnom prípade, aj v tom homogénnom chceme nájsť lineárny odhad a zároveň najlepší v zmysle strednej kvadratickej odchylky. Označíme ho $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom}$. Navyše však musí splňať podmienku nestrannosti, teda $E\left[\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom}\right] = E[\mu(\Theta_i)]$. Úlohu opäť prevedieme na optimalizačný proces

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom} = \operatorname{argmin}_{N\in\Psi} \mathrm{E}\left[(\mu(\Theta_i) - N)^2\right],$$

kde množina Ψ obsahuje všetky možné prípustné homogénne lineárne kombinácie pozorovaní $Y_{i,0},...,Y_{i,I-i}$ splňujúce podmienku nestrannosti, teda

$$\Psi = \left\{N; N = \sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{I-i} c_{i,j}\cdot Y_{i,j}; E\left[\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{I-i} c_{i,j}\cdot Y_{i,j}\right] = E[\mu(\Theta_i)]\right\},$$

pričom $c_{i,j}$ sú reálne konštanty.

Platí, že pri splnení predpokladov Bühlmann - Straubovho modelu, je optimálny homogénny lineárny kredibilitný odhad veličiny $\mu(\Theta_i)$ podmienený pozorovaniami $\{Y_{i,j}, i = 0,...,I, j = 0,...,I-i\}$ pre $0 \le i \le I$ v tvare

$$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom} = z_i \cdot \rho_i + (1 - z_i)\cdot \widetilde{m}, \tag{3.8}$$

kde

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i} + s^2/a}, \\ \rho_i &= \sum_{j=0}^{I-i} \frac{\delta_j}{\gamma_{I-i}}\cdot\frac{Y_{i,j}}{\delta_j} = \frac{X_{i,I-i}}{\gamma_{I-i}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

majú rovnaké vyjadrenie ako v nehomogénnom prípade (3.7), navyše

$$\widetilde{m} = \sum_{i=0}^{I} \frac{z_i}{z_\bullet}\cdot \rho_i, \tag{3.10}$$

pričom

$$z_{\bullet} = \sum_{i=0}^{I} z_i. \tag{3.11}$$

Všimneme si, že vážené priemery ρ_i závisia len na škodách vzniknutých v roku i, čo je dôsledkom predpokladu nezávislosti riadkov vývojového trojuholníka v Bühlmann - Straubovom modeli. Kredibilitné váhy $z_i \in [0,1]$ sú pomerne malé, ak očakávané výkyvy škôd v rámci jedného roka i, teda $s^2 = E\left[\sigma^2\left(\Theta_i\right)\right]$, sú veľké. Naopak, váhy z_i sú dostatočne veľké, ak kolísanie škodných udalostí medzi jednotlivými rokmi, to znamená $a = var\left(\mu\left(\Theta_i\right)\right)$, je vysoké.

3.4 Modifikácia modelu

Ak očakávané výšky celkových škôd μ_i sú rôzne pre jednotlivé roky vzniku škôd i, tak upravíme predpoklady Bühlmann - Straubovho modelu nasledujúcim spôsobom.

Predpoklady modifikovaného Bühlmann - Straubovho modelu:

A. Rizikové parametre $\Theta_0, \Theta_1, ..., \Theta_I$ sú vzájomne nezávislé, stejne rozdelené náhodné veličiny.
B. Náhodné vektory $(\Theta_i, Y_{i,0}, Y_{i,1}..., Y_{i,J})$ sú vzájomne nezávislé pre všetky $0 \leq i \leq I$.
C. Existujú merateľné funkcie $\mu(\cdot)$ a $\sigma^2(\cdot)$ také, že pre $0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J$ a pre vhodné $\Gamma \geq 0$ platia vyjadrenia

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Y_{i,j}}{\delta_j \cdot \mu_i}|\Theta_i\right] &= \mu\left(\Theta_i\right), \\ var\left[\frac{Y_{i,j}}{\delta_j \cdot \mu_i}|\Theta_i\right] &= \frac{\sigma^2\left(\Theta_i\right)}{\delta_j \cdot \mu_i^{\Gamma}}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

D. $cov\left(\frac{Y_{i,k}}{\delta_k \cdot \mu_i}, \frac{Y_{i,l}}{\delta_l \cdot \mu_i}|\Theta_i\right) = 0$ pre $k \neq l$.

Tento model má oproti základnému BS modelu jednu výhodu. Platí totiž, že

$$
\begin{aligned}
m = E\left[\mu\left(\Theta_i\right)\right] = E\left[E\left[\frac{Y_{i,j}}{\delta_j \cdot \mu_i}|\Theta_i\right]\right] = \\
= E\left[\frac{Y_{i,j}}{\delta_j \cdot \mu_i}\right] = \frac{1}{\mu_i} \cdot E\left[\frac{Y_{i,j}}{\delta_j}\right] = \frac{1}{\mu_i} \cdot E\left[X_{i,J}\right] = 1,
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

čím pre nehomogénny lineárny kredibilitný odhad $\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom}$ získavame zjednodušenie

$$
\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom} = z_i \cdot \rho_i + (1 - z_i) \cdot 1, \tag{3.14}
$$

kde

$$
\begin{aligned}
z_i &= \frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i} + \frac{s^2}{a \cdot \mu_i^{\Gamma}}}, \\
\rho_i &= \frac{X_{i,I-i}}{\gamma_{I-i} \cdot \mu_i}
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

pre všetky $0 \leq i \leq I$.
Homogénny kredibilitný odhad $\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{hom}$ zostáva pre $0 \leq i \leq I$ v tvare

$$
\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{hom} = z_i \cdot \rho_i + (1 - z_i) \cdot \widetilde{m}, \tag{3.16}
$$

kde

$$
\widetilde{m} = \sum_{i=0}^{I} \frac{z_i}{z_\bullet} \cdot \rho_i, \tag{3.17}
$$

pričom z_i, ρ_i sú tvaru (3.15) a navyše $z_\bullet = \sum_{i=0}^{I} z_i$.

Na základe týchto posledných vyjadrení stanovíme očakávané celkové škody pomocou BS modelu.

Pri splnení predpokladov A-D v Bühlmann - Straubovom modeli očakávaná celková výška škôd $\widehat{X}_{i,J}^{nehom}$, resp. $\widehat{X}_{i,J}^{hom}$ stanovená pomocou nehomogénneho, resp. homogénneho lineárneho kredibilitného odhadu je určená pre všetky $1 \leq i \leq I$ nasledujúcimi vzťahmi

$$
\widehat{X}_{i,J}^{nehom} = \widehat{E}\left[X_{i,J}|X_{i,0}, ..., X_{i,I-i}\right] = X_{i,I-i} + (1 - \gamma_{I-i}) \cdot \mu_i \cdot \widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom} \tag{3.18}
$$

a

$$\widehat{X}_{i,J}^{hom} = \widehat{E}\left[X_{i,J}|X_{i,0},...,X_{i,I-i}\right] = X_{i,I-i} + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \mu_i \cdot \widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{hom}. \quad (3.19)$$

Ďalej je zrejmé, že odhad vzniknutých, ale dosiaľ nevyplatených škôd z roku i stanovíme ako

$$\begin{aligned} \widehat{R}_i^{nehom} = \widehat{X}_{i,J}^{nehom} - X_{i,I-i} = (1-\gamma_{I-i}) \cdot \mu_i \cdot \widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom}, \\ \widehat{R}_i^{hom} = \widehat{X}_{i,J}^{hom} - X_{i,I-i} = (1-\gamma_{I-i}) \cdot \mu_i \cdot \widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{hom} \end{aligned} \quad (3.20)$$

pre všetky $0 \leq i \leq I$. Výrazy $\widehat{R}_i^{nehom}$ a $\widehat{R}_i^{hom}$ predstavujú príslušné kredibilitné rezervy stanovené na základe predpokladov Bühlmann - Straubovho modelu.

3.5 Stredná kvadratická odchylka

Prínosom v tejto podkapitole bude odvodenie strednej kvadratickej odchylky nehomogénnej rezervy $mse\left(\widehat{R}_i^{nehom}\right)$. Pri odvodzovaní využijeme v knihe [3] − 4. kapitole uvedenú a pre $0 \leq i \leq I$ platnú rovnosť

$$E\left[\left(\widehat{\mu\left(\Theta_i\right)}^{nehom} - \mu\left(\Theta_i\right)\right)^2\right] = a \cdot (1-z_i). \quad (3.21)$$

Veta 3.5.1. *Nech sú splnené predpoklady A-D v Bühlmann - Straubovom modeli. Nech pri danom Θ_i sú prírastky škôd $Y_{i,0},...,Y_{i,J}$ vzájomne nezávislé. Tak stredná kvadratická odchylka nehomogénnej rezervy $mse\left(\widehat{R}_i^{nehom}\right)$ je vyjadrená vzťahom*

$$mse\left(\widehat{R}_i^{nehom}\right) = \mu_i^2 \cdot \left[\frac{(1-\gamma_{I-i}) \cdot s^2}{\mu_i^{\Gamma}} + (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot a \cdot (1-z_i)\right] \quad (3.22)$$

pre všetky $0 \leq i \leq I$.

Dôkaz. Vychádzame z (1.21), čím analogicky dostávame

$$mse\left(\widehat{R}_i^{nehom}\right) = E\left[\left(\widehat{R}_i^{nehom} - R_i\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\left((1-\gamma_{I-i})\cdot\mu_i\cdot\widehat{\mu(\Theta_i)}^{nehom} - (X_{i,J} - X_{i,I-i})\right)^2\right]. \tag{3.23}$$

Práve využitím predpokladu podmienenej nezávislosti škodných prírastkov $Y_{i,j}$ prepíšeme vzťah (3.23) na tvar (viď kniha [10] , strana 151)

$$\begin{aligned} &E\left[E\left[(1-\gamma_{I-i})^2\cdot\mu_i^2\cdot\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{nehom} - \mu(\Theta_i)\right)^2|\Theta_i\right]\right] + \\ &+E\left[E\left[((1-\gamma_{I-i})\cdot\mu_i\cdot\mu(\Theta_i) - (X_{i,J} - X_{i,I-i}))^2|\Theta_i\right]\right]. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Upravíme a zjednodušíme obe stredné hodnoty z (3.24). Platí, že

$$E\left[E\left[(1-\gamma_{I-i})^2\cdot\mu_i^2\cdot\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{nehom} - \mu(\Theta_i)\right)^2|\Theta_i\right]\right] =$$

$$= E\left[(1-\gamma_{I-i})^2\cdot\mu_i^2\cdot\left(\widehat{\mu(\Theta_i)}^{nehom} - \mu(\Theta_i)\right)^2\right] =$$

$$= (1-\gamma_{I-i})^2\cdot\mu_i^2\cdot a\cdot(1-z_i),$$

kde sme využili vlastnosť podmienenej strednej hodnoty a platnosť vzťahu (3.21). Druhú strednú hodnotu z (3.24) prepíšeme na tvar

$$E\left[var\left(X_{i,J} - X_{i,I-i}|\Theta_i\right)\right],$$

pričom táto rovnosť plynie z vlastnosti podmieneného rozptylu, pretože platí vyjadrenie

$$var\left(X_{i,J} - X_{i,I-i}|\Theta_i\right) = E\left[((X_{i,J} - X_{i,I-i}) - E\left(X_{i,J} - X_{i,I-i}|\Theta_i\right))^2|\Theta_i\right] =$$

$$= E\left[((X_{i,J} - X_{i,I-i}) - (1-\gamma_{I-i})\cdot\mu_i\cdot\mu(\Theta_i))^2|\Theta_i\right].$$

Z predpokladu "C" Bühlmann - Straubovho modelu navyše vyplýva, že

$$E\left[var\left(X_{i,J} - X_{i,I-i}|\Theta_i\right)\right] = E\left[(1-\gamma_{I-i})\cdot\mu_i^{2-\Gamma}\cdot\sigma^2(\Theta_i)\right] =$$

$$= (1-\gamma_{I-i})\cdot\mu_i^{2-\Gamma}\cdot s^2.$$

Spojíme všetky čiastkové výsledky dohromady, čím pre strednú kvadratickú odchylku nehomogénnej rezervy dostávame výsledný vzťah

$$mse\left(\widehat{R}_i^{nehom}\right) = (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot \mu_i^2 \cdot a \cdot (1-z_i) + (1-\gamma_{I-i}) \cdot \mu_i^{2-\Gamma} \cdot s^2 =$$

$$= \mu_i^2 \cdot \left[\frac{(1-\gamma_{I-i})\cdot s^2}{\mu_i^\Gamma} + (1-\gamma_{I-i})^2 \cdot a \cdot (1-z_i)\right].$$

□

3.6 Odhady štrukturálnych parametrov

Na základe predpokladov Bühlmann - Straubovho modelu, ktoré sme definovali na začiatku tejto kapitoly, uvedieme pre úplnosť odhady $\widehat{m}$, $\widehat{s^2}$, $\widehat{a}$ štrukturálnych parametrov $m = E\left[\mu\left(\Theta_i\right)\right],\ s^2 = E\left[\sigma^2\left(\Theta_i\right)\right],\ a = var\left(\mu\left(\Theta_i\right)\right).$

Pre väčšiu prehľadnosť zavedieme značenie

$$Z_{i,j} = \frac{Y_{i,j}}{\delta_j},\ \delta_\bullet = \sum_{j=0}^{I-i} \delta_j = \gamma_{I-i},$$

$$\overline{Z}_{i,l} = \sum_{j=0}^{I-i} \frac{\delta_j}{\delta_\bullet} \cdot Z_{i,j} = \sum_{j=0}^{I-i} \frac{\delta_j}{\gamma_{I-i}} \cdot \frac{Y_{i,j}}{\delta_j} = \rho_i,$$

$$\overline{Z}_{z,l} = \sum_{i=0}^{I} \frac{z_i}{z_\bullet} \cdot \overline{Z}_{i,l} = \sum_{i=0}^{I} \frac{z_i}{z_\bullet} \cdot \rho_i = \widetilde{m},$$

pomocou ktorého môžeme štrukturálne parametre odhadnúť vzťahmi

$$\widehat{m} = \overline{Z}_{\widehat{z},l} = \sum_{i=0}^{I} \frac{\widehat{z}_i}{\widehat{z}_\bullet} \cdot \overline{Z}_{i,l}, \tag{3.25}$$

kde $\widehat{z}_i = \frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+\widehat{s^2}/\widehat{a}}$ a $\widehat{z}_\bullet = \sum_{i=0}^{I} \widehat{z}_i$, pričom navyše platí, že $\overline{Z}_{z,l}$ má najmenší rozptyl spomedzi všetkých odhadov, ktoré sú v tvare $\sum_{i=0}^{I} \zeta_i \cdot \overline{Z}_{i,l}$, kde pre všetky i sú koeficienty $\zeta_i \geq 0$ a $\sum_{i=0}^{I} \zeta_i = 1$.

Odhad

$$\widehat{s^2} = \frac{1}{I} \sum_{i=0}^{I-1} \frac{1}{I-i} \sum_{j=0}^{I-i} \delta_j \cdot \left(Z_{i,j} - \overline{Z}_{i,l}\right)^2 \tag{3.26}$$

je nestranný odhad parametru s^2, teda $E\left[\widehat{s^2}\right] = s^2$,

$$\widehat{a} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^{I-1} \widehat{z}_i \cdot \left(\overline{Z}_{i,l} - \overline{Z}_{\widehat{z},l}\right)^2 \tag{3.27}$$

je takzvaný pseudoestimátor, pričom

$$\widetilde{a} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=0}^{I-1} z_i \cdot \left(\overline{Z}_{i,l} - \overline{Z}_{z,l} \right)^2 \tag{3.28}$$

je nestranný odhad parametru a, teda $E\left[\widetilde{a}\right] = a$.

4. Ďalšie kredibilitné modely

Táto kapitola poskytuje krátky prehľad o niektorých ostatných kredibilitných modeloch. Jedná sa o staršie a menej používané modely de Vyldera a Macka. Popíšeme základné predpoklady modelov, stanovíme kredibilitnú formulu, odvodíme a prinesieme zaujímavú súvislosť medzi týmito modelmi a Bühlmann - Straubovým modelom z kapitoly 3. Rovnako predpokladáme, že máme k dispozícii nekumulatívny vývojový trojuholník zaplatených škôd $\{Y_{i,j}, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\}$.

4.1 de Vylderov model

Predpoklady tohto modelu vychádzajú z článku de Vyldera [4].

Predpoklady de Vylderovho modelu:

1. Rizikové parametre $\Theta_0, \Theta_1, ..., \Theta_I$ sú vzájomne nezávislé, stejne rozdelené náhodné veličiny.
2. Náhodné vektory $(\Theta_i, Y_{i,0}, Y_{i,1} ..., Y_{i,J})$ sú vzájomne nezávislé pre všetky $0 \leq i \leq I$.
3. $Y_{i,j}/p_i = \mu(\Theta_i) \cdot C_{i,j}$ pre všetky $0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J$, pričom $\mu(\Theta_i)$ je skalárna funkcia, $C_{i,j}$ sú neznáme náhodné veličiny nezávislé na Θ_i a p_i je váha rizika príslušná roku vzniku škôd i.
4. $E[C_{i,j}] = y_j$.
5. $var[C_{i,j}] = \frac{r^2}{p_i} \cdot I$, kde I je jednotková štvorcová matica.

Definujme štrukturálne parametre: $b = E[\mu(\Theta_i)]$, $s^2 = r^2 \cdot E[\mu^2(\Theta_i)]$, $a = var(\mu(\Theta_i))$.

Kredibilitný odhad M_i veličiny $\mu(\Theta_i)$ má tvar

$$M_i = w_i \cdot B_i + (1 - w_i) \cdot b, \tag{4.1}$$

kde

$$w_i = \frac{a}{a + \frac{s^2}{p_i \cdot \sum_{j=0}^{I-i} y_j^2}} \tag{4.2}$$

a

$$B_i = \frac{\sum_{j=0}^{I-i} y_j \cdot \frac{Y_{i,j}}{p_i}}{\sum_{j=0}^{I-i} y_j^2} \tag{4.3}$$

pre všetky $0 \leq i \leq I$.

Po zavedení váh p_i a hodnôt y_j môžeme prepísať predpoklad (3.3) v BS modeli do podoby

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Y_{i,j}}{p_i \cdot y_j}|\Theta_i\right] &= \mu\left(\Theta_i\right), \\ var\left[\frac{Y_{i,j}}{p_i \cdot y_j}|\Theta_i\right] &= \frac{\sigma^2\left(\Theta_i\right)}{E_{i,j}} = \frac{\sigma^2\left(\Theta_i\right)}{p_i \cdot y_j^{\epsilon}}, \end{aligned} \tag{4.4}$$

kde $\epsilon \geq 0$ a $E_{i,j}$ je objem rizika príslušný škode $Y_{i,j}$. Ďalej budeme využívať vzťah $E_{i,\bullet} = \sum_{j=0}^{I-i} E_{i,j}$.

Z predpokladov de Vylderovho modelu plynie, že

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i}|\Theta_i\right] &= \mu\left(\Theta_i\right), \\ var\left[\frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i}|\Theta_i\right] &= \frac{r^2 \cdot \mu^2\left(\Theta_i\right)}{p_i \cdot y_j^2}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

čo sa podobá na predpoklad (4.4), ak $\epsilon = 2$ a $r^2 \cdot \mu^2\left(\Theta_i\right) = \sigma^2\left(\Theta_i\right)$. V tom prípade by z (3.6) malo platiť, že

$$M_i = z_i \cdot \rho_i + (1 - z_i) \cdot m, \tag{4.6}$$

kde z_i a ρ_i sú ako v (3.7). Za predpokladu, že $\delta_j = y_j \cdot p_i$ nám stačí ukázať, že $z_i = w_i$, $\rho_i = B_i$, $b = m$.

Upravíme z_i a ρ_i zo vzťahu (3.7) do nasledujúcej podoby

$$\rho_i = \sum_{j=0}^{I-i} \frac{\delta_j}{\gamma_{I-i}} \cdot \frac{Y_{i,j}}{\delta_j} = \sum_{j=0}^{I-i} \frac{\delta_j}{\sum_{j=0}^{I-i} \delta_j} \cdot \frac{Y_{i,j}}{\delta_j} = \sum_{j=0}^{I-i} \frac{E_{i,j}}{E_{i,\bullet}} \cdot \frac{Y_{i,j}}{\delta_j},$$

$$z_i = \frac{\gamma_{I-i}}{\gamma_{I-i}+s^2/a} = \frac{\gamma_{I-i} \cdot a}{a \cdot \gamma_{I-i}+s^2} = \frac{a}{a+\frac{s^2}{\gamma_{I-i}}} = \frac{a}{a+\frac{s^2}{E_{i,\bullet}}},$$

z čoho jednoznačne plynie, že

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{\sum_{j=0}^{I-i} y_j \cdot \frac{Y_{i,j}}{p_i}}{\sum_{j=0}^{I-i} y_j^2} = \frac{\sum_{j=0}^{I-i} y_j^2 \cdot p_i \cdot \frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i}}{\sum_{j=0}^{I-i} y_j^2 \cdot p_i} = \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{I-i} E_{i,j} \cdot \frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i}}{E_{i,\bullet}} = \sum_{j=0}^{I-i} \frac{E_{i,j}}{E_{i,\bullet}} \cdot \frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i} = \rho_i, \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$z_i = \frac{a}{a + \frac{s^2}{E_{i,\bullet}}} = \frac{a}{a + \frac{s^2}{p_i \cdot \sum_{j=0}^{I-i} y_j^2}} = w_i, \tag{4.8}$$

a nakoniec

$$b = E\left[\mu\left(\Theta_i\right)\right] = E\left[E\left[\frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i}|\Theta_i\right]\right] = E\left[\frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i}\right] = E\left[\frac{Y_{i,j}}{\delta_j}\right] = m, \tag{4.9}$$

čím sme overili platnosť požadovaných vzťahov, dokázali formulu (4.6) a zároveň ukázali, že de Vylderov model je v postate modifikovaný BS model s voľbou $\epsilon = 2$.

Samotný de Vylderov model však nenašiel v praxi veľké uplatnenie. Predpoklad $var\left(\frac{Y_{i,j}}{p_i}|\Theta_i\right) = \frac{r^2 \cdot \mu^2(\Theta_i)}{p_i}$ sa zdá byť nepoužiteľný. Podľa de Vyldera rozptyl nezávisí na časovom indexe j, teda zostáva konštantný počas celého vývojového obdobia, čo je v praxi nereálne.

4.2 Mackov model

Práve predpoklad rozptylu sa stal námetom pre vznik tohto modelu, ktorý sme prebrali z článku Thomasa Macka [6] a preformulovali do nasledujúcej podoby.

Predpoklady Mackovho modelu:

1. Rizikové parametre $\Theta_0, \Theta_1, ..., \Theta_I$ sú vzájomne nezávislé, stejne rozdelené náhodné veličiny.
2. Náhodné vektory $(\Theta_i, Y_{i,0}, Y_{i,1}..., Y_{i,J})$ sú vzájomne nezávislé pre všetky $0 \leq i \leq I$.
3. $E\left[\frac{Y_{i,j}}{p_i}|\Theta_i\right] = y_j \cdot \mu\left(\Theta_i\right)$, pričom $E\left[\mu\left(\Theta_i\right)\right] = 1$.
4. $var\left[\frac{Y_{i,j}}{p_i}|\Theta_i\right] = \frac{y_j \cdot \sigma^2(\Theta_i)}{p_i}$ pre $0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J$.

Definujeme opäť štrukturálne parametre: $s^2 = E\left[\sigma^2\left(\Theta_i\right)\right], a = var\left(\mu\left(\Theta_i\right)\right).$

Kredibilitný odhad M_i veličiny $\mu\left(\Theta_i\right)$ má tvar

$$M_i = w_i \cdot B_i + \left(1 - w_i\right), \tag{4.10}$$

kde tentokrát

$$w_i = \frac{a}{a + \frac{s^2}{p_i \cdot \sum_{j=0}^{I-i} y_j}} \tag{4.11}$$

a

$$B_i = \frac{\sum_{j=0}^{I-i} \frac{Y_{i,j}}{p_i}}{\sum_{j=0}^{I-i} y_j} \tag{4.12}$$

pre všetky $0 \leq i \leq I$.

Predpoklady Mackovho modelu upravíme na tvar

$$\begin{aligned} E\left[\frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i} | \Theta_i\right] &= \mu\left(\Theta_i\right), \\ var\left[\frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i} | \Theta_i\right] &= \frac{\sigma^2\left(\Theta_i\right)}{p_i \cdot y_j}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

ktorý spĺňa požiadavku Bühlmann - Straubovho modelu (4.4), ak polozíme $\epsilon = 1$. Za týchto okolností platí vzťah (3.6), teda

$$M_i = z_i \cdot \rho_i + \left(1 - z_i\right), \tag{4.14}$$

kde z_i a ρ_i sú ako v (3.7) a $\delta_j = y_j \cdot p_i$. Opäť potrebujeme ukázať, že $z_i = w_i$, $\rho_i = B_i$. Keďže sa jedná o analogické (až na voľbu $\epsilon = 1$) vzťahy ako v prípade de Vylderovho modelu, ich odvodenie je už pomerne jednoduché. Platí

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{\sum_{j=0}^{I-i} \frac{Y_{i,j}}{p_i}}{\sum_{j=0}^{I-i} y_j} = \frac{\sum_{j=0}^{I-i} y_j \cdot p_i \cdot \frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i}}{\sum_{j=0}^{I-i} y_j \cdot p_i} = \\ &= \frac{\sum_{j=0}^{I-i} E_{i,j} \cdot \frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i}}{E_{i,\bullet}} = \sum_{j=0}^{I-i} \frac{E_{i,j}}{E_{i,\bullet}} \cdot \frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i} = \rho_i, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$z_i = \frac{a}{a + \frac{s^2}{E_{i,\bullet}}} = \frac{a}{a + \frac{s^2}{p_i \cdot \sum_{j=0}^{I-i} y_j}} = w_i, \tag{4.16}$$

čím sme overili platnosť požadovaných vzťahov, a teda ukázali, že aj Mackov model je špeciálnym prípadom Bühlmann - Straubovho modelu, tentokrát však s voľbou $\epsilon = 1$.

Mack naďalej analyzoval predpoklad rozptylu, pričom sledoval kvadratickú závislosť rozptylu veličín $Y_{i,j}$ na hodnotách y_j, teda predpokladal pre všetky $0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J$, že

$$var\left[\frac{Y_{i,j}}{p_i}|\Theta_i\right] = \frac{y_j^2 \cdot \sigma^2\left(\Theta_i\right)}{p_i}, \tag{4.17}$$

čo môžeme ekvivalentne zapísať v tvare

$$var\left[\frac{Y_{i,j}}{y_j \cdot p_i}|\Theta_i\right] = \frac{\sigma^2\left(\Theta_i\right)}{p_i}, \tag{4.18}$$

z ktorého ihneď vidíme, že sa jedná o ďalší špeciálny prípad zmieňovaného Bühlmann - Straubovho modelu, tentokrát však s parametrom $\epsilon = 0$.

5. Numerické výpočty

Všetky vývojové trojuholníky použité k výpočtom sú samostatne vymyslené. Postup výpočtu je riadne popísaný a odvodený v príslušných kapitolách. Výsledky nadväzujú a korešpondujú so závermi uvedenými v teoretickej časti.

5.1 Príklad 1

Budeme uvažovať kumulatívny vývojový trojuholník zaplatených škôd, teda veličiny $\{X_{i,j}, 0 \leq i \leq 7, 0 \leq j \leq 7\}$ uvedené v tabuľke 5.1.1, spočítame rezervy príslušných metod a porovnáme strednú kvadratickú odchylku Benktanderovej rezervy $mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right)$.

Tabuľka 5.1.1 Kumulatívny vývojový trojuholník $\{X_{i,j}, 0 \leq i \leq 7, 0 \leq j \leq 7\}$

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
$i=0$	134615	238749	265835	272916	277961	279462	281059	282010
$i=1$	168233	243748	263051	267548	271659	273752	275242	
$i=2$	152099	224012	244110	250140	255059	256294		
$i=3$	132212	201265	222484	227475	231291			
$i=4$	140002	217767	240906	245911				
$i=5$	121093	202189	222211					
$i=6$	129906	198125						
$i=7$	133053							

Prameň: Vlastný

Spočítame vývojové faktory $\widehat{f}_j$, pre $i + j > 7$ odhadneme škody $\widehat{X}_{i,j}^{CL}$ a stanovíme Chain Ladder rezervu $\widehat{R}_i^{CL}$.

Tabuľka 5.1.2 Odhad škôd $\widehat{X}_{i,j}^{CL}$ a rezervy $\widehat{R}_i^{CL}$ metódou Chain Ladder

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$\widehat{R}_i^{CL}$
$\widehat{f}_j$	$1,5599$	$1,0986$	$1,0223$	$1,0176$	$1,0060$	$1,0056$	$1,0034$		
$i=0$									0
$i=1$								276173	931
$i=2$							257724	258596	2302
$i=3$						232679	233977	234769	3478
$i=4$					250232	251734	253139	253995	8084
$i=5$				227172	231164	232552	233849	234641	12430
$i=6$			217653	222512	226423	227782	229053	229828	31703
$i=7$		207553	228010	233100	237197	238620	239952	240764	107711
Spolu									166639

Prameň: Vlastný výpočet

Z tabuľky 5.1.2 vidíme, že odhad celkovej rezervy $\widehat{R}_i^{CL}$ Chain Ladder metódou je vo výške 166639.

K stanoveniu Bornhuetter - Fergusonovej rezervy $\widehat{R}_i^{BF}$ potrebujeme odhady $\widehat{\gamma}_{I-i}$, ktoré získame z vývojových faktorov a apriórny odhad celkovej výšky škôd $\widehat{\mu}_i$.

Tabuľka 5.1.3 Odhad škôd $\widehat{X}_{i,J}^{BF}$ a rezervy $\widehat{R}_i^{BF}$ metódou Bornhuetter - Ferguson

	$\widehat{\mu}_i$	$\widehat{\gamma}_{I-i}$	odhad $\widehat{X}_{i,J}^{BF}$	odhad $\widehat{X}_{i,J}^{CL}$	rezerva $\widehat{R}_i^{BF}$	rezerva $\widehat{R}_i^{CL}$
$i = 0$	288182	$1,000$	282010	282010	0	0
$i = 1$	287905	$0,997$	276213	276173	971	931
$i = 2$	273318	$0,991$	258727	258596	2433	2302
$i = 3$	269812	$0,985$	235288	234769	3997	3478
$i = 4$	270123	$0,968$	254509	253995	8598	8084
$i = 5$	261235	$0,947$	236049	234641	13838	12430
$i = 6$	258912	$0,862$	233840	229828	35715	31703
$i = 7$	277123	$0,553$	257030	240764	123977	107711
Spolu					189529	166639

Prameň: Vlastný výpočet

V tabuľke 5.1.3 si môžeme všimnuť, že rôzne metódy môžu viesť k podstatným rozdielom vo výške rezerv. V tomto prípade je rezerva $\widehat{R}_i^{BF}$ vyššia ako rezerva $\widehat{R}_i^{CL}$, pretože apriórny odhad $\widehat{\mu}_i$ bol zvolený pomerne konzervatívne a pesimisticky.

Kombináciou CL a BF metódy stanovíme pomocou tvrdenia (1.3.1) odhad $\widehat{X}_{i,J}^{Benk}$ a následne Benktanderovu rezervu $\widehat{R}_i^{Benk}$.

Tabuľka 5.1.4 Odhad škôd $\widehat{X}_{i,J}^{Benk}$ a rezervy $\widehat{R}_i^{Benk}$ Benktanderovou metódou

	$X_{i,I-i}$	$\widehat{X}_{i,J}^{BF}$	$\widehat{X}_{i,J}^{Benk}$	$\widehat{X}_{i,J}^{CL}$	rezerva $\widehat{R}_i^{BF}$	rezerva $\widehat{R}_i^{Benk}$	rezerva $\widehat{R}_i^{CL}$
$i = 0$	282010	282010	282010	282010	0	0	0
$i = 1$	275242	276213	276173	276173	971	931	931
$i = 2$	256294	258727	258597	258596	2433	2303	2302
$i = 3$	231291	235288	234777	234769	3997	3486	3478
$i = 4$	245911	254509	254012	253995	8598	8101	8084
$i = 5$	222211	236049	234715	234641	13838	12504	12430
$i = 6$	198125	233840	230381	229828	35715	32256	31703
$i = 7$	133053	257030	248041	240764	123977	114988	107711
Spolu					189529	174569	166639

Prameň: Vlastný výpočet

Vidíme, že Benktanderova rezerva $\widehat{R}_i^{Benk}$ sa pre všetky roky i nachádza medzi rezervami $\widehat{R}_i^{CL}$ a $\widehat{R}_i^{BF}$. Pretože kredibilitný násobiteľ $c = \widehat{\gamma}_{I-i}$ je pre všetky i väčší ako $0,5$ (tabuľka 5.1.3), tak $\widehat{R}_i^{Benk}$ je bližšie k rezerve $\widehat{R}_i^{CL}$.

Pre úplnosť uvedieme aj Cape - Cod rezervu $\widehat{R}_i^{CC}$. Na základe vývojového trojuholníka sme odhadli $\widehat{\tau}^{CC} = 0,665$.

Tabuľka 5.1.5 Odhad škôd $\widehat{X}_{i,J}^{CC}$ a rezervy $\widehat{R}_i^{CC}$ metódou Cape - Cod

	π_i	$\widehat{X}_{i,I-i}^{CC}$	$\widehat{X}_{i,J}^{CC}$	rezerva $\widehat{R}_i^{CC}$	rezerva $\widehat{R}_i^{BF}$	rezerva $\widehat{R}_i^{Benk}$	rezerva $\widehat{R}_i^{CL}$
$i=0$	397634	264567	282010	0	0	0	0
$i=1$	389404	258218	276116	874	971	931	931
$i=2$	387894	255789	258592	2298	2433	2303	2302
$i=3$	356849	233913	234809	3518	3997	3486	3478
$i=4$	393693	253607	254248	8337	8598	8101	8084
$i=5$	361346	227687	234947	12736	13838	12504	12430
$i=6$	365426	209599	231664	33539	35715	32256	31703
$i=7$	382814	140758	247001	113948	123977	114988	107711
Spolu				175249	189529	174569	166639

Prameň: Vlastný výpočet

Je zrejmé, že Cape - Cod rezerva $\widehat{R}_i^{CC}$ sa najviac približuje Benktanderovej rezerve $\widehat{R}_i^{Benk}$, čo je potvrdením teoretického výsledku, že Cape - Cod metóda je kredibilitným modelom Benktanderovho typu, kde $\widehat{\mu}_i = \widehat{\tau}^{CC} \cdot \pi_i$.

K stanoveniu optimálnej rezervy $\widehat{R}_i(c_i^*)$ a strednej kvadratickej odchylky $mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right)$ je potrebné uskutočniť nasledujúcu úvahu, ktorá vychádza z práce [8]. Predpokladáme, že podmienené náhodné veličiny $X_{i,j}|X_{i,J}$ majú Beta rozdelenie s parametrami $\chi_i \cdot \gamma_j$ a $\chi_i \cdot (1-\gamma_j)$, teda platí, že

$$\begin{aligned} E[X_{i,j}|X_{i,J}] &= \gamma_j \cdot X_{i,J}, \\ var[X_{i,j}|X_{i,J}] &= \gamma_j \cdot (1-\gamma_j) \cdot \frac{X_{i,J}^2}{1+\chi_i} \end{aligned} \tag{5.1}$$

pre všetky $0 \leq i \leq I$ a všetky $0 \leq j \leq J$. Porovnaním (5.1) s predpokladmi modelu 2 zo strany 13 zisťujeme, že

$$\begin{aligned} E\left[\lambda^2(X_{i,J})\right] = \frac{E\left[X_{i,J}^2\right]}{1+\chi_i} &= \frac{var\left(X_{i,J}\right) + \left(E\left[X_{i,J}\right]\right)^2}{1+\chi_i} = \\ &= \frac{\left(E\left[X_{i,J}\right]\right)^2}{1+\chi_i} \cdot \left(CV^2\left[X_{i,J}\right]+1\right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

kde $CV\left[X_{i,J}\right] = \frac{\sqrt{var\left[X_{i,J}\right]}}{E\left[X_{i,J}\right]}$ je variačný koeficient. Predpokladáme, že pri stanovení apriórnych odhadov sme sa dopustili chyby najviac 8%, to znamená $CV\left[X_{i,J}\right] = 0,08$. Hodnotu $\chi_i = 584$ sme odhadli na základe dostupných dát. Teraz už máme k dispozícii všetky potrebné informácie k výpočtu veličiny $E\left[\lambda^2(X_{i,J})\right]$, ktorá je potrebná k určeniu optimálneho kredibilitného faktora c_i^* a stredných kvadratických odchyliek jednotlivých rezerv.

Tabuľka 5.1.6 Optimálna rezerva $\widehat{R}_i(c_i^*)$ a jej porovnanie s ostatnými rezervami

	t_i	c_i^*	rezerva $\widehat{R}_i^{CL}$	rezerva $\widehat{R}_i^{BF}$	rezerva $\widehat{R}_i(c_i^*)$	rezerva $\widehat{R}_i^{Benk}$
$i=0$	$0,343$	$0,745$	0	0	0	0
$i=1$	$0,343$	$0,744$	931	971	941	931
$i=2$	$0,343$	$0,743$	2302	2433	2336	2303
$i=3$	$0,343$	$0,742$	3478	3997	3612	3486
$i=4$	$0,343$	$0,739$	8084	8598	8219	8101
$i=5$	$0,343$	$0,734$	12430	13838	12804	12504
$i=6$	$0,343$	$0,716$	31703	35715	32844	32256
$i=7$	$0,343$	$0,617$	107711	123977	113936	114988
Spolu			166639	189529	174691	174569

Prameň: Vlastný výpočet

Z tabuľky 5.1.6 môžeme vyčítať najväčší význam Benktanderovej metódy. Celková rezerva $\widehat{R}_i^{Benk}$ je takmer totožná s rezervou $\widehat{R}_i(c_i^*)$, pri ktorej nastáva minimalizácia strednej kvadratickej odchylky. Ešte lepšie je možné zachytiť tento výsledok v nasledujúcej tabuľke. Kvôli vysokým hodnotám stredných kvadratických odchyliek uvedieme ich hodnoty pre lepšiu orientáciu v odmocninovom tvare.

Tabuľka 5.1.7 Porovnanie stredných kvadratických odchyliek jednotlivých rezerv

	$\sqrt{E\left[\lambda^2(X_{i,J})\right]}$	$\sqrt{mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right)}$	$\sqrt{mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right)}$	$\sqrt{mse\left(\widehat{R}_i(c_i^*)\right)}$	$\sqrt{mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right)}$
$i=0$	11697	0	0	0	0
$i=1$	11455	$666,32$	$668,46$	$666,03$	$666,31$
$i=2$	10726	$1016,56$	$1025,09$	$1015,40$	$1016,48$
$i=3$	9738	$1194,13$	$1210,61$	$1191,85$	$1193,88$
$i=4$	10536	$1910,27$	$1965,00$	$1902,31$	$1908,46$
$i=5$	9735	$2302,46$	$2407,65$	$2286,20$	$2296,64$
$i=6$	9556	$3822,37$	$4203,14$	$3746,64$	$3766,87$
$i=7$	10288	$9256,51$	$10449,11$	$8426,96$	$8451,79$
Spolu		$10589,96$	$11809,81$	$9838,28$	$9871,24$

Prameň: Vlastný výpočet

Numericky sme ukázali najdôležitejší výsledok, že stredná kvadratická odchylka Benktanderovej rezervy $mse\left(\widehat{R}_i^{Benk}\right)$ je nižšia ako $mse\left(\widehat{R}_i^{CL}\right)$ aj ako $mse\left(\widehat{R}_i^{BF}\right)$ a je skoro tak dobrá ako stredná kvadratická odchylka rezervy $mse\left(\widehat{R}_i(c_i^*)\right)$ s použitím optimálneho kredibilitného násobiteľa c_i^*.

5.2 Príklad 2

Budeme vychádzať z kumulatívneho trojuholníka $\{X_{i,j}, 0 \leq i \leq 6, 0 \leq j \leq 6\}$ zaplatených škôd s hodnotami v tabuľke 5.2.1. Spočítame homogénny $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom}$ a nehomogénny $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{nehom}$ lineárny kredibilitný Bühlmann - Straubov odhad celkových škôd a následne príslušné rezervy.

Tabuľka 5.2.1 Kumulatívny vývojový trojuholník $\{X_{i,j}, 0 \leq i \leq 6, 0 \leq j \leq 6\}$

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=0$	560235,3	841315,1	926331,1	954297,5	973550,1	983116,3	990118,4
$i=1$	553869,1	827315,1	931616,1	954193,6	972105,4	980663,3	
$i=2$	546101,2	819317,4	909994,3	947695,1	970013,2		
$i=3$	562169,4	852779,0	930016,0	955167,1			
$i=4$	527153,2	811118,2	917793,4				
$i=5$	555555,2	836696,3					
$i=6$	544407,3						

Prameň: Vlastný

Spočítame nekumulatívne škody $Y_{i,j}$, odhadneme vývojové faktory $\widehat{f}_j$, z ktorých jednoducho určíme koeficienty $\{\gamma_j\}$, následne koeficienty $\{\delta_j\}$, čím získavame veličiny uvedené v tabuľke 5.2.2 v tvare $\frac{Y_{i,j}}{\delta_j}$, ktoré spĺňujú predpoklady Bühlmann - Straubovho modelu.

Tabuľka 5.2.2 Pozorovania v tvare $\frac{Y_{i,j}}{\delta_j}$

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=0$	1005405	990330	904671	975385	959296	1043881	990118
$i=1$	993980	963434	1109887	787430	892480	933884	
$i=2$	980039	962624	964911	1314918	1112012		
$i=3$	1008875	1023908	821894	877205			
$i=4$	946035	1000496	1135149				
$i=5$	997005	990546					
$i=6$	976999						

Prameň: Vlastný výpočet

Zo vzťahov (3.6) a (3.8) stanovíme nehomogénny $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{nehom}$ a homogénny $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom}$ kredibilitný Bühlmann - Straubov odhad celkových škôd.

Tabuľka 5.2.3 Homogénny a nehomogénny kredibilitný Bühlmann - Straubov odhad celkových škôd

	z_i	ρ_i	m	$\widetilde{m}$	odhad $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{nehom}$	odhad $\widehat{\mu(\Theta_i)}^{hom}$
			987957	987145		
$i=0$	$0,684$	990118			990118	990118
$i=1$	$0,682$	987648			987746	987488
$i=2$	$0,680$	986022			986641	986381
$i=3$	$0,676$	991151			990116	989852
$i=4$	$0,669$	981573			983686	983417
$i=5$	$0,645$	994825			992389	992101
$i=6$	$0,546$	976999			981969	981601

Prameň: Vlastný výpočet

V nasledujúcej tabuľke uvedieme homogénnu $\widehat{R}_i^{hom}$ a nehomogénnu $\widehat{R}_i^{nehom}$ Bühlmann - Straubovu kredibilitnú rezervu. Pre objektívnejšie porovnanie ju navyše porovnáme s Chain Ladder rezervou $\widehat{R}_i^{CL}$.

Tabuľka 5.2.4 Odhad homogénnej a nehomogénnej kredibilitnej Bühlmann - Straubovej rezervy

	nehomogénna rezerva $\widehat{R}_i^{nehom}$	homogénna rezerva $\widehat{R}_i^{hom}$	rezerva $\widehat{R}_i^{CL}$
$i=0$	0	0	0
$i=1$	7083	6825	6985
$i=2$	16628	16368	16009
$i=3$	34949	34685	35984
$i=4$	65893	65624	63780
$i=5$	155693	155405	158129
$i=6$	437562	437194	432592
Spolu	717806	716101	713479

Prameň: Vlastný výpočet

Vidíme, že homogénny i nehomogénny Bühlmann - Straubov model vedú k veľmi podobným, takmer až totožným výsledkom. Zaujímavejšie je porovnanie s Chain Ladder rezervou. Pre niektoré roky, napríklad $i = 5$, je hodnota $\widehat{R}_i^{CL}$ najvyššia, pre $i = 4$ naopak najnižšia a pre rok vzniku škôd $i = 1$ sa nachádza hodnota $\widehat{R}_i^{CL}$ priamo v intervale medzi homogénnou a nehomogénnou Bühlmann - Straubovou rezervou. V celkovom súčte sú však tieto rezervy podobné, líšia sa o menej ako 1%.

5.3 Príklad 3

V tomto príklade uvažujeme pre zmenu nekumulatívny vývojový trojuholník $\{Y_{i,j}, 0 \leq i \leq 6, 0 \leq j \leq 6\}$. Odhadneme škody $\widehat{Y}_{i,j}$ pre $i+j > 6$, spočítame de Vylderovu a Mackovu rezervu.

Tabuľka 5.3.1 Nekumulatívny vývojový trojuholník $\{Y_{i,j}, 0 \leq i \leq 6, 0 \leq j \leq 6\}$

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=0$	1034, 11	1299, 85	1115, 22	733, 17	805, 23	419, 25	23, 09
$i=1$	837, 98	2005, 13	913, 34	1111, 44	333, 97	185, 72	
$i=2$	1099, 34	873, 78	808, 46	1005, 38	419, 47		
$i=3$	736, 12	693, 65	1000, 08	813, 35			
$i=4$	593, 56	1814, 12	999, 93				
$i=5$	1001, 34	839, 98					
$i=6$	777, 66						
$\widehat{y}_j$	868, 587	1254, 418	967, 406	915, 835	519, 556	302, 485	23, 09

Prameň: Vlastný

Predpokladáme, že $p_i = 1$ pre všetky i, navyše $\widehat{y}_j$ sme odhadli ako priemer známych hodnôt $Y_{i,j}$ pre pevné j. Škody $\widehat{Y}_{i,j}$ de Vylderovou metódou pre všetky i, j odhadneme na základe vzťahu

$$\widehat{Y}_{i,j} = \widehat{y}_j \cdot M_i, \tag{5.3}$$

kde M_i je v tvare (4.1).

Tabuľka 5.3.2 Odhad škôd $\widehat{Y}_{i,j}$ de Vylderovou metódou

	B_i	w_i	M_i	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=0$	1, 080	0, 342	1, 027							
$i=1$	1, 203	0, 342	1, 069							24, 7
$i=2$	0, 908	0, 337	0, 969						293, 1	22, 4
$i=3$	0, 785	0, 323	0, 930					483, 4	281, 5	21, 5
$i=4$	1, 151	0, 275	1, 041				954, 1	541, 3	315, 1	24, 1
$i=5$	0, 826	0, 213	0, 962			931, 5	881, 8	500, 3	291, 2	22, 2
$i=6$	0, 895	0, 080	0, 991		1243, 8	959, 2	908, 1	515, 2	299, 9	22, 9

Prameň: Vlastný výpočet

Analogicky budeme postupovať aj v prípade Mackovho modelu. Jediným rozdielom oproti de Vylderovi bude aplikovanie kredibilitného odhadu M_i tentokrát ale zo vzťahu (4.10).

Tabuľka 5.3.3 Odhad škôd $\widehat{Y}_{i,j}$ Mackovou metódou

	B_i	w_i	M_i	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$i=0$	$1,119$	$0,459$	$1,054$							
$i=1$	$1,115$	$0,457$	$1,053$							$24,3$
$i=2$	$0,929$	$0,441$	$0,968$						$293,1$	$22,4$
$i=3$	$0,809$	$0,412$	$0,921$					$478,8$	$278,7$	$21,3$
$i=4$	$1,102$	$0,350$	$1,036$				$948,8$	$538,3$	$313,4$	$23,9$
$i=5$	$0,867$	$0,270$	$0,964$			$932,6$	$882,9$	$500,9$	$291,6$	$22,3$
$i=6$	$0,895$	$0,131$	$0,986$		$1237,1$	$954,0$	$903,2$	$512,4$	$298,3$	$22,8$

Prameň: Vlastný výpočet

Porovnanie de Vylderovej a Mackovej metódy zhrnieme v záverečnej tabuľke. Napriek tomu, že sa kredibilitné váhy w_i v oboch modeloch zreteľne líšia, odhad celkových IBNR rezerv je takmer totožný.

Tabuľka 5.3.4 Porovnanie de Vylderovej a Mackovej rezervy

	kredibilitná de Vylderova rezerva $\widehat{R}_i$	kredibilitná Mackova rezerva $\widehat{R}_i$
$i=0$	0	0
$i=1$	$24,7$	$24,3$
$i=2$	$315,5$	$315,5$
$i=3$	$786,4$	$778,8$
$i=4$	$1834,6$	$1824,4$
$i=5$	$2627,0$	$2630,3$
$i=6$	$3949,1$	$3927,8$
Spolu	$9537,3$	$9501,1$

Prameň: Vlastný výpočet

Záver

V uvedenej práci sme sa zaoberali rôznymi metódami stanovenia výšky rezerv na poistné plnenie. Jednotlivé rezervy sme porovnávali na základe kritéria strednej kvadratickej odchylky. Ukázali sme, že tie metódy, ktoré sú založené na kredibilitnej formule, sú na základe tohto nami zvoleného kritéria najlepšie. Z teoretického hľadiska sme tento výsledok podrobne dokázali, odvodili sme príslušné vzťahy pre stredné kvadratické odchylky, navyše sme stanovili medze, v ktorých je Benktanderova kredibilitná rezerva najlepšia. Odvodené závery sme pre zvýraznenie publikovali v numerickom príklade v praktickej časti.

Najdôležitejším záverom je, že Benktanderova kredibilitná rezerva sa svojou výslednou hodnotou len minimálne líši od optimálnej rezervy a v porovnaní s klasickými metódami Chain Ladder a Bornhuetter - Ferguson má najmenšiu strednú kvadratickú odchylku ako to môžeme pozorovať v tabuľkách 5.1.6 a 5.1.7 z príkladu 1. Musíme ale zdôrazniť, že napriek ideálnym teoretickým výsledkom sa Benktanderova metóda nestala štandardnou a bežne používanou metódou v praxi. Príčinou je častokrát nedodržaný dôležitý predpoklad nezávislosti náhodných veličín U_i na škodách $X_{i,j}$ (predpoklad 4 na strane 11). Je totiž možné, že odvodené vzťahy nemusia vždy platiť, ak bude veličina U_i upravovaná a regulovaná v priebehu vývojového obdobia škôd tak ako sa to často stáva v praxi.

Záverom dodávame, že na základe nami zvolených pozorovaní sú výsledné rozdiely medzi homogénnou a nehomogénnou Bühlmann - Straubovou rezervou (tabuľka 5.2.4 v príklade 2) alebo medzi rezervami v modeloch de Vyldera a Macka (tabuľka 5.3.4 v príklade 3) veľmi malé. Toto konštatovanie však nemusí vždy platiť, pretože je to dané voľbou a povahou zvolených vývojových trojuholníkov.

Zoznam použitej literatúry

[1] Benktander, Gunnar: An Approach To Credibility In Calculating IBNR For Casualty Excess Reinsurance. *The Actuarial Review*. 1976, str. 7-11.

[2] Bornhuetter, R.L., Ferguson, R.E: The Actuary And IBNR. *Proceedings Of The Casualty Actuarial Society*. Vol. LIX, 1972, str. 181-195.

[3] Bühlmann, Hans, Gisler, Alois: *A Course In Credibility Theory And Its Applications*. 4. vydanie. Berlin, Germany: Springer, 2005, str. 77-95. ISBN 3-540-25733-5.

[4] De Vylder, F.: Estimation Of IBNR Claims By Credibility Theory. *Insurance: Mathematics And Economics 1*. 1982, str. 35-40.

[5] Hürlimann, Werner: Credible Loss Ratio Claims Reserves: The Benktander, Neuhaus And Mack Methods Revisited. *Astin Bulletin 39(1)*. 2009, str. 81-99.

[6] Mack, Thomas: Improved Estimation Of IBNR Claims By Credibility Theory. *Insurance: Mathematics And Economics 9*. 1990, str. 51-57.

[7] Mack, Thomas: Distribution-free Calculation Of The Standard Error Of Chain Ladder Reserve Estimates. *Astin Bulletin 23*. 1993, str. 213-225.

[8] Mack, Thomas: Credible Claims Reserves: The Benktander Method. *Astin Bulletin 30(2)*. 2000, str. 333-347.

[9] Neuhaus, Walther: Another Pragmatic Loss Reserving Method Or Bornhuetter/Ferguson Revisited. *Scandinavian Actuarial Journal*. 1992, str. 151-162.

[10] Wüthrich, Mario V., Merz, Michael: *Stochastic Claims Reserving Methods In Insurance*. 2. vydanie. Chichester, England: Wiley, 2008, str. 95-98, 145-152. ISBN 978-0-470-72346-3.

Zoznam tabuliek

Zoznam použitých skratiek

Benk .... Benktander
BF .... Bornhuetter - Ferguson
BS .... Bühlmann - Straub
CC .... Cape - Cod
CL .... Chain Ladder
hom .... homogénny
Hovi .... Hovinen
nehom .... nehomogénny
resp. .... respektíve
str. .... strana